Chapitre 12

Dénombrement

12.1 Ensemble fini

Définition 12.1.1
On appelle ensemble fini *tout ensemble*

Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est appelé

EXEMPLE

L'ensemble est un ensemble fini, de cardinal
L'ensemble vide est un ensemble fini, de cardinal . C'est même l'unique ensemble de cardinal nul.

Lemme 12.1.2
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Alors

Démonstration. Admis. □

Théorème 12.1.3
Soit E un ensemble fini. Alors E est de cardinal n si et seulement s'il existe

Démonstration. Admis. □

Corollaire 12.1.4
Soient E et F deux ensembles finis. Alors E et F ont le même cardinal si et seulement s'il existe

Démonstration. Soient n et p les cardinaux respectifs de E et F. On a donc deux bijections $\varphi : E \to [\![1, n]\!]$ et $\psi : F \to [\![1, p]\!]$.

- Supposons $n = p$. Alors il est clair que est une bijection de E dans F.

- Supposons qu'on a une bijection η entre E et F. On est alors dans la situation suivante :

  Alors est une bijection, et par le lemme, $n = p$.

□

Lemme 12.1.5
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Toute partie de $[\![1, n]\!]$ est

Démonstration. Montrons par récurrence sur n la propriété P_n : "Toute partie finie de $[\![1, n]\!]$ est finie de cardinal inférieur ou égal à n".

- Si $n = 1$, c'est évident,
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons P_n. Soit E une partie de $[\![1, n+1]\!]$.
  - Si $E = [\![1, n+1]\!]$,
  - Si $n+1 \notin E$, alors
  - Sinon, soit $k \in [\![1, n+1]\!] \backslash E$; on a donc $k \neq n+1$. On définit la fonction

    $$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & [\![1, n]\!] \\ i & \longmapsto & \end{array} .$$

    On vérifie alors que f est une injection : soient $i, j \in E$ tels que $f(i) = f(j)$.

    On peut alors définir une bijection $g : E \to f(E)$ par

  Par récurrence, on a bien le résultat voulu.

□

Théorème 12.1.6
Soient E un ensemble fini et A une partie de E. Alors

On a égalité des cardinaux si et seulement si

12.2 Opérations sur les ensembles finis

Définition 12.2.1
Soient E et F deux ensembles finis. On dit que E et F sont disjoints *si*

On dit alors que l'union $E \cup F$ est disjointe, et on note plutôt $E \sqcup F$.

Quand on réunit deux ensembles disjoints, on ne met ensemble que des éléments distincts, et le cardinal de la réunion est donc la somme des cardinaux :

Proposition 12.2.2
Soient E et F deux ensembles finis disjoints. Alors $E \sqcup F$ est fini, et

$$\mathrm{Card}(E \sqcup F) =$$

EXEMPLE

On tire une carte dans un jeu de 52 cartes. Alors le nombre de possibilités de tirer un 2 ou une figure est

Proposition 12.2.3
Soient E un ensemble fini et $A \subseteq E$. Alors $\overline{A}$ est fini et

$$\mathrm{Card}\,\overline{A} =$$

Démonstration. L'union $E = A \sqcup \overline{A}$ est disjointe, et donc

$$\mathrm{Card}\,E =$$

□

Théorème 12.2.4 : Formule du crible, principe d'inclusion-exclusion
Soient E et F deux ensembles finis. Alors $E \cup F$ est fini, et

$$\mathrm{Card}(E \cup F) =$$

Démonstration. On a $E \cup F =$, l'union étant disjointe. Alors

$$\operatorname{Card}(E \cup F) =$$

et comme $F =$, on a

$$\operatorname{Card} F =$$

Il suffit alors de remplacer dans la formule précédente pour trouver le résultat. □

EXEMPLE

On tire une carte dans un jeu de 52 cartes. Alors le nombre de possibilités pour tirer un 2 ou un cœur est

Proposition 12.2.5
Soient $A_1, \dots, A_n$ des ensembles finis deux à deux disjoints. Alors

$$\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$$

est fini et

$$\operatorname{Card} \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i =$$

Dans le cas d'une union quelconque, les résultat deviennent rapidement plus compliqués :

Proposition 12.2.6 : Formule du crible, principe d'inclusion-exclusion
Soient E, F, G trois ensembles finis. Alors $E \cup F \cup G$ est fini, et

$\operatorname{Card}(E \cup F \cup G) =$

EXEMPLE

On tire une carte dans un jeu de 52 cartes. Alors le nombre de possibilités pour tirer un 2 ou un cœur ou un rouge est

Proposition 12.2.7 : Formule du crible, principe d'inclusion-exclusion
Soient $A_1, \dots, A_n$ des ensembles finis. Alors $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ est fini, et

$$\operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) =$$

Proposition 12.2.8
Soient E et F deux ensembles finis. Alors $E \times F$ est un ensemble fini, et

$$\mathrm{Card}(E \times F) =$$

Si $p \in \mathbb{N}^*$, alors E^p est un ensemble fini, et

$$\mathrm{Card}(E^p) =$$

EXEMPLE

Un cadenas à code présente 3 roulettes de 10 positions chacune. Le nombre de possibilités de code est alors

Proposition 12.2.9
Soit E un ensemble fini. Alors l'ensemble des parties de E, noté $\mathfrak{p}(E)$ est un ensemble fini, et

$$\mathrm{Card}(\mathfrak{p}(E)) =$$

12.3 Un peu de combinatoire

Les questions de dénombrement peuvent très souvent être ramenées à la question de choisir p objets parmi n. Les questions à se poser sont : l'ordre des éléments choisis importe-t-il ? les tirages se font-ils avec ou sans remise ?

On a donc quatre types de tirage possible.

Avec répétition et ordre

Définition 12.3.1
Soit E un ensemble, et soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle p-liste de E

NOTA

Attention !

Proposition 12.3.2
Soit E un ensemble fini de cardinal n, et soit $p \in \mathbb{N}^*$. Il y a exactement p-listes de E.

MÉTHODE :

Démonstration. C'est une reformulation exacte du cardinal d'un produit cartésien. □

EXEMPLE FONDAMENTAL

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement p boules, en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage. On a alors tirages possibles, dans l'ordre.

EXERCICE

Combien de mots de quatre lettres (pas nécessairement sensés) peut-on écrire avec les lettres B,C,P,S,T ?

Sans répétition, avec ordre

Définition 12.3.3
Une p-liste de E est dite sans répétition *si*

Proposition 12.3.4
Soit E de cardinal n, et soit $p \in \mathbb{N}^*$. Il y a exactement

p-arrangements de E.

MÉTHODE :

EXEMPLE FONDAMENTAL

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement p boules, sans remettre la boule dans l'urne après chaque tirage. On a alors tirages possibles.

EXERCICE

Dans une course s'affrontent 15 chevaux. On peut parier sur le podium de la course. Combien y a-t-il de paris possibles ?

Définition 12.3.5
Soit E un ensemble fini de cardinal n. On appelle permutation *de E*

On note $\mathfrak{S}(E)$ l'ensemble des permutations de E, et $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$.

EXEMPLE

L'ensemble des permutations de $\{1, 2, 3\}$ est

$$\mathfrak{S}_3 = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}.$$

NOTA

Les permutations sont donc les n-arrangements sur un ensemble de cardinal n.

Proposition 12.3.6
Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors

$$\mathrm{Card}(\mathfrak{S}(E)) =$$

Démonstration. D'après la remarque précédente, c'est évident. □

EXEMPLE

On veut calculer le nombre d'anagrammes (pas nécessairement sensés) d'un mot. Deux cas se présentent :

- si le mot a n des lettres toutes distinctes, il y a exactement
- si le mot a des lettres apparaissant plusieurs fois,

Par exemple, il y a exactement anagrammes de BCPST.
Il y a anagrammes de MISSISSIPPI

Sans répétition, sans ordre

Définition 12.3.7
*Soit E un ensemble fini. On appelle p-*combinaison *de E*

Proposition 12.3.8
Soit E un ensemble de cardinal n. Il y a alors

$$=$$

p-combinaisons de E.

MÉTHODE :

EXEMPLE FONDAMENTAL

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement p boules, qu'on place dans un panier, sans remettre la boule dans l'urne après chaque tirage. On a alors paniers finaux possibles.

EXERCICE

On tire cinq carte d'un jeu de 52 cartes. Combien y a-t-il de mains possibles ?
Combien y a-t-il de mains avec le 2 de pique ?
Combien y a-t-il de mains avec exactement 3 piques et 2 cœurs ?

Avec répétition, sans ordre
Ce cas-là est plus rare. On appelle p-suite de E tout élément de

$$\{\{(x_1, n_1), \ldots, (x_k, n_k)\} \mid x_i \in E, \sum_{i=1}^{k} n_i = p\}.$$

EXERCICE

Combien y a-t-il de dominos numérotés de 0 à 6 ? (Un domino est une pièce contenant deux nombres, réversible).

Conclusion
Pour résumer, on peut dresser le tableau suivant, qui compte le nombre de façons de choisir p éléments parmi n :

	Avec répétition	Sans répétition
Avec Ordre		
Sans Ordre		

12.4 Ensembles de fonctions

Proposition 12.4.1
Soient E et F sont deux ensembles finis, de cardinaux respectifs n et p. Alors

- *Il existe une injection de E dans F si et seulement si*
- *Il existe une surjection de E dans F si et seulement si*
- *Il existe une bijection de E dans F si et seulement si*

Dans le cas d'ensembles finis, on peut simplement caractériser les bijections :

Proposition 12.4.2
Soient E et F deux ensembles finis de même cardinal, et soit $\varphi : E \to F$. Alors sont équivalentes :

(i)

(ii)

(iii)

Démonstration. On fait une preuve cyclique.

(i)⇒(ii)

(ii)⇒(iii)

(iii)⇒(i)

□

On peut maintenant compter les applications.

Proposition 12.4.3
Il y a exactement applications de E dans F.

EXEMPLE

Il y a donc applications de E dans $\{0,1\}$.

Proposition 12.4.4
Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p. Alors le nombre d'injections de E dans F est

Démonstration. Commençons par numéroter les éléments de E $x_1, \ldots, x_n$. Définir une injection de E dans F, c'est

On a vu qu'il existait exactement tels arrangements (avec ordre, sans répétition). □

Corollaire 12.4.5
Soient E et F deux ensembles finis de même cardinal n. Il y a bijections de E dans F.

Démonstration. On a vu que , et donc il y a bijections. □

12.5 Exercices

Exercice 1. On tire une main de 8 cartes dans un jeu de 52 cartes.

a) Combien y a-t-il de mains possibles ?

b) Combien y a-t-il de mains possibles avec au moins un as ?

c) Combien y a-t-il de mains possibles avec au moins un cœur ou une dame ?

d) Combien y a-t-il de mains possibles avec exactement un as et exactement un cœur ?

e) Combien y a-t-il de mains possibles avec des cartes d'exactement deux couleurs ?

f) Combien y a-t-il de mains possibles avec des cartes d'au plus deux couleurs ?

g) Combien y a-t-il de mains possibles avec huit cartes dont les rangs se suivent ?

Exercice 2. On appelle *différence symétrique* de deux ensembles E et F l'ensemble

$$E\Delta F = (E \cup F) \backslash (E \cap F).$$

Si E et F sont des ensembles finis, calculer le cardinal de $E\Delta F$ en fonction de Card E et Card F.

Exercice 3. On veut écrire un mot de cinq lettres.

a) Combien peut-on en écrire ?

b) Combien de mots ne contiennent que des lettres distinctes ?

c) Combien de mots contiennent exactement 4 lettres distinctes ? 3 lettres distinctes ?

Exercice 4. On part du point de coordonnées $(0, 0)$ pour rejoindre le point de coordonnées (p, q), $p, q \in \mathbb{N}$. Les déplacements autorisées sont d'une unité vers la droite ou d'une unité vers le haut.

Combien y a-t-il de chemins possibles ?

Exercice 5. a) Combien y a-t-il de nombres ayant au plus r chiffres ? exactement r chiffres (on n'autorise pas les 0 à gauche) ?

b) Combien y a-t-il de nombres de r chiffres dont la somme des chiffres fait 3 ?

Exercice 6. On souhaite ranger 42 livres différents dans une bibliothèque.

a) De combien de façons peut-on les ranger sur une étagère ?

b) Combien y a-t-il de façons de les ranger sur deux étagères (chaque étagère doit être non vide) ?

c) De combien de façons peut-on les ranger en vrac dans deux tiroirs ?

Exercice 7. a) Soient p, q, r trois entiers, au moins un étant non nul. Combien de mots de $n = p + q + r$ lettres peut-on former ayant p fois la lettre A, q fois la lettre B et r fois la lettre C ?

b) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer la formule du multinôme à trois variables

$$(a+b+c)^n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{k} a^i b^i c^{n-i-j}.$$

Exercice 8. Soient n et p deux entiers non nuls. On note $s_{n,p}$ le nombre de surjections de d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à p éléments.

a) Calculer $s_{n,1}$, $s_{n,n}$ et $s_{n,p}$ si $p > n$.

b) Si $n \geqslant 2$ et $2 \leqslant p \leqslant n$, montrer que

$$s_{n,p} = p(s_{n-1,p} + s_{n-1,p-1}).$$

c) Montrer que

$$\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} s_{n,k} = p^n.$$

Exercice 9. Lors d'une soirée avec $n \geqslant 2$ personnes, certains invités trinquent ensemble. Montrer qu'il existe au moins deux invités ayant trinqué aec le même nombre de personne.