Chapitre 16

Limites et continuité d'une fonction

16.1 Limites

Dans tout cette section, f désigne une fonction d'un ensemble X dans $\mathbb{R}$.

16.1.1 Définitions

On peut regarder si une fonction admet une *limite* à un point où elle n'est pas forcément définie. Ce point doit cependant être au *voisinage* de l'ensemble de définition :

Définition 16.1.1
Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que f est définie au voisinage de *a s'il existe un intervalle I contenant a et non réduit à un point, tel que*

De la même façon, on dit que f est définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) s'il existe un réel b tel que

Dans cette section, on note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Définition 16.1.2
Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ au voisinage de f et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f admet ℓ pour limite au point a si

Cette définition n'est pas utilisable en pratique ; on donne donc dans ce tableau les équivalents pour les limites finies ou infinies en des points finis ou infinis :

$\lim\limits_{x \to a} = \ell$		Valeur de $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$		
		$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
Valeur de $a \in \overline{\mathbb{R}}$	$a \in \mathbb{R}$	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,$ $\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap X,$ $\lvert f(x) - \ell \rvert < \varepsilon$	$\forall M > 0,\ \exists \eta > 0,$ $\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap X,$ $f(x) > M$	$\forall M < 0,\ \exists \eta > 0,$ $\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap X,$ $f(x) < M$
	$+\infty$	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{R},$ $\forall x > N,\ \lvert f(x) - \ell \rvert < \varepsilon$	$\forall M > 0,\ \exists N \in \mathbb{R},$ $\forall x > N,\ f(x) > M$	$\forall M < 0,\ \exists N \in \mathbb{R},$ $\forall x > N,\ f(x) < M$
	$-\infty$	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{R},$ $\forall x < N,\ \lvert f(x) - \ell \rvert < \varepsilon$	$\forall M > 0,\ \exists N \in \mathbb{R},$ $\forall x < N,\ f(x) > M$	$\forall M < 0,\ \exists N \in \mathbb{R},$ $\forall x < N,\ f(x) < M$

EXERCICE

Montrer, à l'aide de la définition, que la fonction $x \mapsto x^2$ admet admet 0 pour limite en 0, et $+\infty$ en $+\infty$.

En général, on n'utilisera pas la définition "epsilonesque*" des limites, mais on utilisera plutôt des propriétés plus haut niveau.

Proposition 16.1.3 : Unicité de la limite
Si f admet une limite ℓ en a, alors

Démonstration. On traite le cas où $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Les cas infinis sont analogues.

Supposons Soit $\varepsilon > 0$. Alors, par définition, il existe η_1 et η_2 tels que :

$\forall x \in [a - \eta_1, a + \eta_1]$, et $\forall x \in [a - \eta_2, a + \eta_2]$,

On pose $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. On a donc, pour $x \in [a - \eta, a + \eta]$,

et

En utilisant l'inégalité triangulaire, on en déduit :

$$\begin{aligned} \lvert \ell_1 - \ell_2 \rvert &= \lvert (f(x) - \ell_2) + (\ell_1 - f(x)) \rvert \\ &\leqslant \\ &\leqslant \end{aligned}$$

*. Traditionnellement, ε désigne un nombre réel strictement positif très petit

Ceci étant vrai pour tout ε [†], on en déduit que ℓ_1 et ℓ_2 sont aussi proches qu'on veut l'un de l'autre, et donc sont égaux. □

Proposition 16.1.4
Si f est définie en a et admet une limite en a,
0

Démonstration. Appelons ℓ cette limite. Soit $\varepsilon > 0$. On a donc un $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in [a - \eta, a + \eta],$$

En particulier, , et donc . □

On a déjà vu le théorème suivant :

Théorème 16.1.5 : Caractérisation séquentielle de la limite
Soient $F : X \to \mathbb{R}$ une fonction, et a au voisinage de X. Alors sont équivalents :

(i)

(ii)

NOTA

Ce théorème sert très rarement à montrer qu'une fonction a une limite. On s'en sert généralement pour montrer qu'une suite converge, ou qu'une fonction n'a pas de limite en a (en exhibant deux suites qui tendent vers a, dont les images ne convergent pas vers la même limite).

Pour les fonctions comme la partie entière, on voit que la limite n'est pas la même si on arrive de la gauche ou de la droite.

Définition 16.1.6
On dit que f admet ℓ pour limite à droite (resp. à gauche) en a si la restriction de f à $X \cap [a, +\infty[$ (resp. $X \cap]-\infty, a]$) admet ℓ pour limite en a, i.e.

On note cette limite $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$, ou encore $f(a^+)$ [‡]

†. on note qu'on a 2ε, et non ϵ…il faudrait couper les ε en deux.
‡. Attention à cette notation, qui désigne bien une limite.

EXERCICE

Soit $p \in \mathbb{Z}$. Trouver les limites à gauche et à droite de la fonction partie entière en p.

Proposition 16.1.7
Sont équivalents :

-
-

16.1.2 Opérations sur les limites

Dans un certain nombre de cas, on peut calculer des limites par opérations élémentaires.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">$\lim_{x\to a}(f+g)(x)$</td><td colspan="3">$\lim_{x\to a} f(x)$</td></tr>
<tr><td>$\ell \in \mathbb{R}$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\lim_{x\to a} g(x)$</td><td>$\ell' \in \mathbb{R}$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$+\infty$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$-\infty$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">$\lim_{x\to a}(fg)(x)$</td><td colspan="3">$\lim_{x\to a} f(x)$</td></tr>
<tr><td>$\ell \in \mathbb{R}^*$</td><td>0</td><td>$\pm\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\lim_{x\to a} g(x)$</td><td>$\ell' \in \mathbb{R}^*$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\pm\infty$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

$\lim\limits_{x\to a} \frac{f}{g}(x)$		$\lim\limits_{x\to a} f(x)$		
		$\ell \in \mathbb{R}^*$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\ell' \in \mathbb{R}^*$			
	0			
	$\pm\infty$			

Dans les cas de la multiplication et de la division de fonction, il faut regarder les signes de f et g au voisinage de a pour trouver le signe de la limite.

La dernière opération possible sur les fonctions est la *composition*, qui est compatible avec les fonctions.

Proposition 16.1.8
Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$. Soit a (resp. b, resp. c) dans le voisinage de A (resp. A, resp. B). On suppose que

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \text{ et } \lim_{x\to b} g(x) = c.$$

Alors

$$\lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = \quad .$$

Démonstration. En exercice. *Appliquer deux fois la définition de limite.* □

En utilisant ces propriétés, et toutes les limites usuelles de la section 16.1.4, on pourra trouver beaucoup de limites.

EXEMPLE

Trouvons la limite quand $x \to +\infty$ de $f(x) = \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$.
On a, d'après les limites usuelles, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \quad$, et $\lim_{x\to 0} \exp(x) = \quad$. Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \quad$.

16.1.3 Limites et ordre

Proposition 16.1.9
Soient $f, g \in \mathbb{R}^X$, et a au voisinage de X. On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$. On suppose de plus que $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a.

Alors $\qquad$.

NOTA

Attention, cette proposition ne permet pas de montrer que des limites existent, mais seulement de comparer des limites déjà existantes.
De plus, ce résultat ne se généralise pas avec des inégalités strictes (même si l'inégalité entre les fonctions est stricte, celle entre les limites sera large).

Pour montrer l'existence de limites, on utilisera les *théorèmes d'encadrement des limites* [§] :

Théorème 16.1.10 : d'encadrement des limites, cas ∞
Soit $a \in \overline{R}$, et soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a. Alors :

- *Si $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a, et que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, alors*
  , et
  .
- *Si $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a, et que $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$, alors*
  , et
  .

Théorème 16.1.11 : d'encadrement des limites, cas réel
Soient $a \in \overline{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Soient f, g, h définies au voisinage de a. On suppose que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \text{ et } \lim_{x \to a} h(x) = \ell.$$

Alors si pour tout x au voisinage de a, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, alors

Pour les fonctions monotones, l'existence de limites à gauche et à droite est automatique :

Théorème 16.1.12 : de la limite monotone
Soit $]\alpha, \beta[$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ ($\alpha, \beta \in \overline{R}$). Soit $f :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Alors :

-

-

§. aussi appelés *théorèmes des gendarmes*

-

Le cas des fonctions décroissantes est analogue.

EXEMPLE

La fonction partie entière est croissante, et donc elle admet une limite à gauche et à droite en tout point.

16.1.4 Comparaison de fonctions

Définition 16.1.13
Soient $f, g : X \to \mathbb{R}$, et a au voisinage de x, tels que f et g ne s'annule pas au voisinage de a.

On dit que f et g sont équivalentes en *a si*

On note alors $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ ou $f \sim_a g$.

Deux fonctions équivalentes ont un comportement semblable au voisinage du point considéré.

Proposition 16.1.14
Soient f et g définies au voisinage de a qui ne s'annule pas. Si $f \sim_a f$, alors

-

-

Comme pour les suites, on peut multiplier des équivalents, et on peut les composer à droite :

Proposition 16.1.15
Soient f, g, h, i des fonctions définies au voisinage de a, ne s'annulant pas au voisinage de a. Alors

- *si $f \sim_a g$ et $h \sim_a i$, alors*
- *si $f \sim_a g$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors*
- *si $f \sim_a g$ et $u \sim_b a$, alors*

NOTA

Attention ! Comme pour les suites, on ne peut en général pas additionner des équivalents, ni les composer à gauche.

Il faut connaître les équivalents des fonctions usuelles, qu'on peut souvent trouver en utilisant les définitions de dérivabilité en un 0 :

Proposition 16.1.16
On a les équivalents suivants :

- $e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim}$
- $\ln(1 + x) \underset{x \to 0}{\sim}$
- $\sqrt{1 + x} - 1 \underset{x \to 0}{\sim}$
- $(1 + x)^\alpha - 1 \underset{x \to 0}{\sim}$
- $\sin(x) \underset{x \to 0}{\sim}$
- $\cos(x) - 1 \underset{x \to 0}{\sim}$
- $\tan(x) \underset{x \to 0}{\sim}$
- $\arctan(x) \underset{x \to 0}{\sim}$

On doit aussi connaître, pour les fonctions usuelles, les croissances comparées suivantes :

Proposition 16.1.17 : Limites puissance/exponentielle
L'exponentielle croît et décroît plus vite que n'importe quelle puissance, i.e.

$$\forall \alpha > 0, \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} =$$

et

$$\forall \alpha > 0, \lim_{x \to -\infty} e^x x^\alpha = \quad .$$

Proposition 16.1.18 : Limites puissance/logarithme
Le logarithme croît et décroît moins vite que n'importe quelle puissance, i.e.

$$\forall \alpha > 0, \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} =$$

et

$$\forall \alpha > 0,\ \lim_{x \to 0} \ln(x) x^{\alpha} = \quad .$$

16.2 Continuité

Définition 16.2.1
Soient $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction, et $a \in X$. On dit que f est continue en a *si f admet une limite en a (qui ne peut être que $f(a)$),* i.e.

On dit qu'une fonction est *continue* sur un intervalle I si

On note $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I.

Proposition 16.2.2 : Développement limité d'ordre 0
Soit $f : X \to \mathbb{R}$, et soit $a \in \mathbb{R}$. Sont équivalents :

(i) f est continue en a

(ii) il existe une fonction ε définie au voisinage de a telle que , et telle que pour tout x au voisinage de a,

$$f(x) =$$

Démonstration. On montre deux implications.

($\Rightarrow$) Si f est continue, on pose $\varepsilon(x) =$.

($\Leftarrow$) Si $f(x) =$, on a bien $\lim_{x \to a} f(x) =$, et donc la continuité en a.

□

Les opérations sur les limites se transmettent donc naturellement aux opérations sur les fonctions continues :

Proposition 16.2.3
Soient f et g deux fonctions continues en $a \in \mathbb{R}$. Alors

- *Si f et g sont continues en $a \in \mathbb{R}$, alors $f + g$, fg, λf pour $\lambda \in \mathbb{R}$ sont continues en a. Si $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est continue en a.*

- *Si f est continue en a, et g continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.*

Définition 16.2.4
Soit $f : I \backslash \{a\}$ une fonction continue. On dit que f est prolongeable par continuité *en a s'il existe*

Proposition 16.2.5
Une telle fonction est prolongeable par continuité en a si et seulement si f admet une limite finie ℓ en a. On prolonge alors f en posant $f(a) = \ell$.

Démonstration. En exercice. □

Définition 16.2.6 : Fonction continue par morceaux
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est continue par morceaux *sur $[a, b]$ s'il existe une suite $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la fonction $f|_{]a_i, a_{i+1}[}$ soit prolongeable par continuité à l'intervalle $[a_i, a_{i+1}]$.*

16.3 Théorèmes des valeurs intermédiaires

Théorème 16.3.1 : des valeurs intermédiaires
Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $k \in \mathbb{R}$. S'il existe $a, b \in I$ tels que $f(a) \leqslant k$ et $f(b) \geqslant k$, alors il existe $c \in [a, b]$ telle que $f(c) = k$.

Démonstration. Si , c'est trivial. Sinon, on considère l'ensemble

$$E =$$

On a $\in E$, et E est majoré par , donc admet une borne supérieure, qu'on appelle c. On va montrer que c'est c qui est la solution.

Supposons $f(c) < k$. On a alors $c \in E$, et donc Appliquons la définition de continuité en c avec $\varepsilon =$ Il existe donc $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [c - eta, c + \eta]$,

.

En particulier, on peut trouver un $x_0 \in]c, b[$ tel que Donc , d'où une contradiction.

Supposons maintenant $f(c) > k$. De la même façon que précédemment, on peut trouver $x_0 \in [a, c[$ tel que $f(x_0) > k$. Ce x_0 , d'où une contradiction.

Finalement, $f(c) = k$. □

NOTA

Attention, ce théorème n'indique que l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = k$. En particulier, il ne permet pas d'en donner une valeur, ni de montrer l'existence d'une telle solution.

On en déduit le théorème suivant :

Proposition 16.3.2 : Image d'un intervalle par une fonction continue
Soit $f \in \mathcal{C}^0(I)$, où I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Alors

Démonstration. En exercice. □

Dans le cas d'une fonction continue sur un segment, on peut être encore plus précis :

Théorème 16.3.3
Soit f une fonction continue sur un segment. Alors

En particulier, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Définition 16.3.4
On appelle homéomorphisme *toute fonction bijective continue dont la réciproque est continue.*

EXEMPLE

La fonction est un homéomorphisme, puisqu'elle est continue, et que sa réciproque est continue.

EXEMPLE

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} [0,1[\cup[2,3[& \longrightarrow & [0,2[\\ x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x-1 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases} \end{array}$$

Alors f est continue (Exercice : vérifier que f est continue en 2), bijective, mais sa réciproque n'est pas continue.

Théorème 16.3.5 : de la bijection
Soit $f \in \mathcal{C}^0(I)$ (I intervalle) une fonction strictement monotone, et $J = f(I)$. Alors , et

Corollaire 16.3.6
Soit $f \in \mathcal{C}^0(I)$ (I intervalle) une fonction strictement monotone. Soient $a, b \in I$. Alors pour tout k entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution.

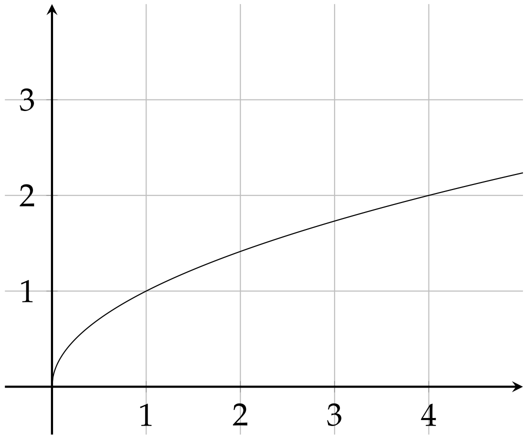
EXEMPLE À CONNAÎTRE

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

- Si n est pair, la fonction $x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Elle admet donc une réciproque, appelée *racine n-ième*, définie par

$$\sqrt[n]{\cdot} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt[n]{x} \end{array}$$

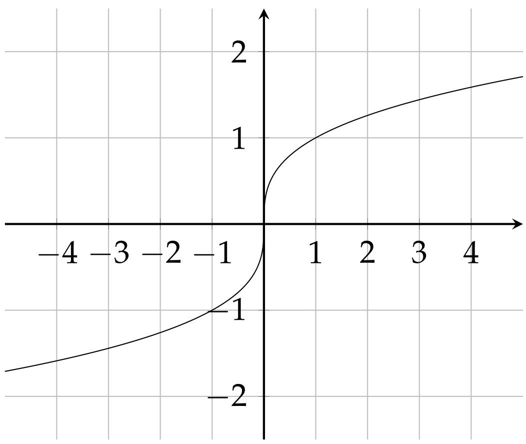
Cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.



- Si n est impair, la fonction $x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une réciproque, appelée *racine n-ième*, définie par

$$\sqrt[n]{\cdot} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt[n]{x} \end{array}$$

Cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et impaire.



16.4 Exercices

Exercice 1. Montrer que les fonctions sin et cos n'admettent pas de limite en $+\infty$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique. Montrer que si f admet une limite finie en ∞, alors f est constante.

Exercice 3. Calculer les limites aux bornes des ensembles de définitions :

a) e^{x^2+x+1}
b) $e^{2x} - e^x$
c) $\frac{e^x+x^2+x+1}{e^{2x}+1}$
d) $\frac{x}{x-1}e^{\frac{1}{x}}$
e) $e^{x^2} - e^{x+1}$
f) $\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)$
g) $\ln\left(\frac{e^x+x^2}{2x+1}\right)$
h) $\ln\left(\frac{2-x}{x+4}\right)$
i) $\frac{2^x}{x^2+1}$
j) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \ln(x)$
k) $\frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2}$
l) $e^x - x^{\frac{2}{3}}$
m) $e^{\frac{1}{x-2}}$
n) $(2x-1)e^{\frac{1}{x-2}}$
o) $\frac{\ln(x^2+1)}{x}$

Exercice 4. Donner un équivalent au point indiqué. En déduire la limite en ce point.

a) $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$ en $+\infty$
b) $\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}$ et $+\infty$ et en 0
c) $\ln(x) + \frac{1}{x}$ en 0^+
d) $\frac{1-e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x^x}}{e^{-x}}$ en $+\infty$
e) $\frac{e^{ax}-1}{x-x^2}$ en 0 et $+\infty$, $a \in \mathbb{R}$
f) $\frac{x^a\ln(x)}{x^x-1}$ en 0^+, $a > 0$
g) $\frac{x^2-1}{\ln(x^2-x+1)}$ en 1
h) $\frac{\sqrt{e^x-1}}{x+\ln(x)-1}$ en 0 et $+\infty$
i) $\frac{3^x-1}{2^x-1}$ en 0
j) $x(\ln(x+1)-\ln(x))$ en $+\infty$
k) $(x+1)\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$ en $+\infty$
l) $\sqrt{\frac{t}{1+t}} - \sqrt{\frac{1+t}{t}}$ en 0 et $+\infty$
m) $\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)$ en $+\infty$, $a \in \mathbb{R}$
n) $\sqrt{1+\sqrt{x^2+1}}$ en $+\infty$
o) $\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$ en $+\infty$, $a, b \in \mathbb{R}$
p) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$ en $+\infty$
q) $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ en $+\infty$
r) $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x}$ en $+\infty$
s) $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^4}$ en $+\infty$
t) $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^4}$ en $+\infty$
u) $(\ln(x))^4 - \frac{x}{(\ln(x))^2}$ en $+\infty$
v) $2^{x+1} - 2^x$ en $+\infty$
w) $2^{x^2+x} - 2^{x^2}$ en $+\infty$
x) $e^{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}$ en $+\infty$
y) $(2^x)^x + 2^{x^2} + (4^x)^2$ en $+\infty$
z) $(x+1)^x - x^x$ en $+\infty$

Exercice 5. Montrer que la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{array}$$

n'admet pas de limite en 0.

En revanche, montrer que la fonction $g(x) = xf(x)$ est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 6. Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

Exercice 7. Pour les fonctions suivantes, dire si elle admet un prolongement par continuité au point indiqué :

(i) $\forall x \in]0,1[,\ f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$ en $a = 0$, puis $a = 1$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f(x) = x^\alpha$ en $a = 0$ (discuter selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$).

Exercice 8. Soit f une fonction continue admettant une limite strictement négative en $-\infty$, et une limite strictement positive en $+\infty$. Montrer que f s'annule au moins une fois.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ continue. Montrer que f est constante.

Exercice 10. Montrer qu'une fonction de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ admettant des limites finies en $\pm\infty$ est bornée.

Indication : Séparer $\mathbb{R}$ en trois : un voisinage de $-\infty$, un voisinage de $+\infty$, le reste.

Exercice 11. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe. Est-ce toujours vrai si $f :]0,1[\to]0,1[$?

Exercice 12. Trouver toutes les applications f continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f(x))^2 = 3f(x) - 2.$$

Exercice 13. Soient $p \in]0,1[$, et $q = 1 - p$. Montrer que l'équation $x^2 - qx - pq = 0$ admet deux solutions réelles distinctes r et s, avec $-1 < r < 0 < s < 1$.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrer que f est continue.

Indication : On pourra montrer que pour tout $a > 0$, f admet des limites à gauche et à droite en a qui sont égales.

Exercice 15. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est *uniformément continue* si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in I,\ |x - y| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

a) Montrer que toute fonction uniformément continue est continue.

b) Soit $\delta \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère la fonction $f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x^2$.

  i. Montrer $\exists x \in \mathbb{R}^+,\ (2x + \delta)\delta > 1$.

  ii. Montrer que $|f(x) - f(y + \delta)| > 1$.

  iii. Que dire de la réciproque de la question a ?