Chapitre 17

Dérivation

17.1 Fonction dérivée

17.1.1 Dérivée en un point

Dans toute cette partie, f désigne une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a un point de I.

Définition 17.1.1
On dit que f est dérivable en a si le taux d'accroissement

admet une limite quand $x \to a,\ x \neq a$.

Dans ce cas, cette limite s'appelle

NOTA

C'est équivalent à dire que le taux d'accroissement

Proposition 17.1.2
f est dérivable au point a si et seulement s'il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

Démonstration. Si f est dérivable au point a, il suffit de choisir $\lambda =$ et

$$\varepsilon(x) =$$

Si ε et λ existent, alors le taux d'accroissement vaut

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} =$$

□

On a alors le théorème suivant

Théorème 17.1.3
Toute fonction dérivable en un point est continue en ce point.

Démonstration. D'après la proposition précédente, $f(x) = f(a) + (f'(a) + \varepsilon(x))(x-a)$. Le second terme de la somme tend vers 0 quand $x \to a$, d'où $\lim_{x\to a} f(x) =$. □

NOTA

Attention, la réciproque est fausse ! La fonction est continue en 0, mais pas dérivable.

Définition 17.1.4
Si f est dérivable en a, la fonction $x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$ s'appelle

Graphiquement, quand on zoome sur la courbe de f au voisinage du point a, la courbe ressemble de plus en plus à la droite d'équation $y =$.

Définition 17.1.5
On dit que f est dérivable à gauche (resp. à droite) en a si le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite quand $x \to a,\ x < a$ (resp. $x > a$).

On note alors $f'_g(a)$ (resp. $f'_d(a)$) le nombre dérivé à gauche (resp. à droite).

Proposition 17.1.6
f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en a, et $f'_g(a) = f'_d(a)$.

EXEMPLE

On condidère la fonction

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$$

On veut montrer que φ est dérivable en 0. On a

$$\lim_{x\to 0,\ x<0} \varphi(a) = \quad ,$$

donc $\varphi'_g(0)$ existe et vaut . De plus

$$\lim_{x\to 0,\ x>0} \varphi(a) = \lim_{x\to 0,\ x>0} \frac{x^2}{x} = 0,$$

et donc $\varphi'_d(0)$ existe et vaut .

17.1.2 Dérivée sur un intervalle

Dans cette partie, f désigne une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Définition 17.1.7
On dit que f est dérivable sur I *si*

Dans ce cas, on note appelle dérivée *et on note f' la fonction* $f' : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$. *On trouvera aussi les notations*

On peut définir de la même manière la dérivabilité à gauche et à droite sur un intervalle.

Définition 17.1.8
On notera l'ensemble des fonctions dérivables sur I, et l'ensemble des fonctions dérivables sur I dont la dérivée est continue sur I.

NOTA

On peut itérer le processus : une fonction f est de classe $\mathcal{D}^2(I)$ si elle est $\mathcal{C}^1(I)$ et que f' est dérivable sur I. Puis f est $\mathcal{C}^2(I)$ si f'' est continue sur I.
Une fonction sera dite $\mathcal{C}^\infty(I)$ si on peut itérer les dérivations autant qu'on le veut.

17.1.3 Dérivées usuelles et opérations sur les dérivées

Dérivées usuelles

Il faut connaître par cœur les dérivées suivantes :

Fonction	Ensemble de dérivabilité	Dérivée
Constante	$\mathbb{R}$	
x	$\mathbb{R}$	
x^2	$\mathbb{R}$	
$\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$	
$\frac{1}{x}$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	
$x^n;\ n \in \mathbb{Z}^*$	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 1$, $\mathbb{R}^*$ si $n \leqslant -1$	
$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^{+*}$	
$\ln(x)$	$]0;+\infty[$	
$\exp(x)$	$\mathbb{R}$	
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	
$\tan(x)$	$\left](2k-1)\frac{\pi}{2},(2k+1)\frac{\pi}{2}\right[,\ k \in \mathbb{Z}$	

Opérations sur les dérivées

La dérivation est préservée par un certain nombre d'opérations sur les fonctions; si f et g sont dérivables sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$,

- $f+g$ est dérivable sur I, et $(f+g)' =$
- fg est dérivable sur I, et $(fg)' =$
- λf est dérivable sur I, et $(\lambda f)' =$
- $\frac{f}{g}$ est dérivable sur $I\backslash\{x \mid g(x)=0\}$, et $\left(\frac{f}{g}\right)' =$

De plus, on peut dériver une composition de fonction :

Théorème 17.1.9
Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions, telles que $f \in \mathcal{D}^1(I)$ et $g \in \mathcal{D}^1(J)$. Alors

Démonstration. Soit $a \in I$; on note $b = f(a)$. Comme g est dérivable en b, on peut écrire

On posant $y = f(x)$, on obtient

Comme f est dérivable en a, on a donc

On obtient donc, en posant

$$\varepsilon_4(x) = g'(f(a))\varepsilon_3(x) + (f'(a) + \varepsilon_3(x))\varepsilon_2(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

□

On en déduit les dérivées suivantes :

$\frac{1}{v}$	là où $v \neq 0$	
$u^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	même que u	
$u^{-n},\ n \in \mathbb{N}^*$	là où $u \neq 0$	
$u^{-\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}^*$	là où $u > 0$	
$\exp(u)$	même que u	
$\ln(u)$	là où $u > 0$	
$\sin(u)$	même que u	
$\cos(u)$	même que u	
$\tan(u)$	là où $\cos(u(x)) \neq 0$	

Théorème 17.1.10
Soit $f : I \to J$ une bijection dérivable sur I. Si $\forall x \in I,\ f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable sur J et

NOTA

Pour être une bijection sur I, il suffit de montrer que la fonction est strictement monotone.

Démonstration. On sait que $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$, et donc en dérivant

Dans le cas où f' ne s'annule pas, on retrouve donc le résultat. □

EXEMPLE FONDAMENTAL

La fonction

$$\tan : \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) \end{array}$$

est strictement croissante sur son ensemble de définition. Comme

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty,$$

tan est donc une bijection.
Sa réciproque est appellée *arctangente*, notée arctan.
Comme $\tan' = 1 + \tan^2$, $\tan'$ ne s'annule jamais, et donc arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

EXEMPLE FONDAMENTAL

Les fonctions racines n-ièmes sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée

$$x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto$$

17.2 Étude de fonction

Le principal intérêt des dérivées est de pouvoir facilement étudier des fonctions.

Définition 17.2.1
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a un point de I qui n'est pas une extrémité. On dit que a est un minimum (resp. maximum) local de f s'il existe $\alpha > 0$ tel que

Proposition 17.2.2
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a un point de I qui n'est pas une extrémité. Si a est un extremum (minimum ou maximum) local de f, alors

Démonstration. On fait la preuve dans le cas d'un minimum. Il suffit de remarquer que

$$f'_g(a) =$$

$$f'_d(a) =$$

Comme f est dérivable en a, on a donc , d'où le résultat. □

Définition 17.2.3
Un point pour lequel $f'(a) = 0$ est appelé

NOTA

Attention, la réciproque est fausse : par exemple,

17.2.1 Accroissements finis

Théorème 17.2.4 : de Rolle
Soient $a < b$ deux réels, et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Si $f(a) = f(b)$, alors

Démonstration. f est continue sur $[a, b]$, donc

Si f est constante,

Sinon,
Par le théorème précédent, on a le résultat. □

Théorème 17.2.5 : des accroissements finis
Soient $a < b$ deux réels, et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Alors

NOTA

Graphiquement, il suffit de faire tourner le théorème de Rolle pour obtenir le théorème des accroissements finis.

Corollaire 17.2.6 : Inégalité des accroissements finis
Soient $a < b$ deux réels, et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Si $\forall x \in]a, b[,\ m \leqslant f'(x) \leqslant M$, alors

Corollaire 17.2.7 : Inégalité des accroissements finis
Soient $a < b$ deux réels, et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Si $\forall x \in]a, b[, |f'(x)| \leqslant k$, alors

EXEMPLE D'APPLICATION

On peut utiliser cette inégalité pour montrer des résultats sur les suites. Posons par exemple $u_0 = 1$ et pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \sin(\frac{x}{2})$.
On peut montrer que pour tout x, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$, et donc l'IAF nous donne

d'où , et par une récurrence immédiate,

Le théorème d'encadrement des limites nous donne donc la limite de la suite :

17.2.2 Sens de variations

Théorème 17.2.8
*Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$ *. Alors*

- *f est croissante sur I si et seulement si*
- *f est décroissante sur I si et seulement si*
- *f est constante sur I si et seulement si*

Dans les deux premiers cas, la monotonie est stricte si l'inégalité est stricte, sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Démonstration. On fait la preuve du premier point.

($\Rightarrow$) Supposons f croissante sur I. Soit $a \in I$. On a donc

par passage à la limite, on obtient bien

($\Leftarrow$) Soient $x < y \in I$. D'après le théorème des accroissements finis,

Comme $f'(c) \geqslant 0$ et $y - x \geqslant 0$, on a donc $f(y) \geqslant f(x)$.

$\square$

Corollaire 17.2.9
Deux fonctions de dérivées égales diffèrent d'une constante.

Démonstration. Si $f' = g'$, alors $(f - g)' = 0$, et donc $f - g$ est contante. $\square$

*. $\mathring{I}$ désigne I privé de ses extrémités.

17.2.3 Passage à la limite dans une dérivée

On peut parfois se passer d'étudier des taux d'accroissements pour étudier la dérivabilité en un point.

Proposition 17.2.10
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b]$. Alors

- *Si $f'(x)$ a une limite $\ell \in \mathbb{R}$ quand $x \to a$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.*
- *Si $f'(x)$ a une limite infinie quand $x \to a$, alors f n'est pas dérivable en a ; plus précisément, la courbe de f admet une tangente verticale en a.*
- *Si $f'(x)$ n'admet pas de limite quand $x \to a$, on ne peut rien conclure.*

Démonstration. Soit $x > a$. On applique le théorème des accroissements finis à f entre a et x :

Alors quand $x \to a$, $c_x \to a$, et donc le taux d'accroissements aura la même limite que $f'(x)$ quand $x \to a$. □

EXERCICE

Pour le troisième point, trouver une fonction pour laquelle la dérivée n'a pas de limite en 0, mais qui est dérivable en 0, puis une fonction pour laquelle la dérivée n'a pas de limite en 0, et qui n'est dérivable en 0.

17.3 Dérivées d'ordre supérieur

Comme dit plus tôt, on peut dériver plusieurs fois les fonctions.

Définition 17.3.1
Soit f une fonction qu'on peut dériver successivement assez de fois. On note alors

- $f^{(0)} = f$
- $f^{(n+1)}$ *est la dérivée de* $f^{(n)}$.

$f^{(n)}$ *s'appelle la* dérivée n-ième de f.

On a alors des formules pour dériver directement n fois les fonctions. Soient f en g deux fonctions suffisamment dérivables. Alors :

- $(f+g)^{(n)} =$
- $(\lambda f)^{(n)} =$
- $(fg)^{(n)} =$ (formule de Leibniz [†])
- On peut aussi calculer la dérivée n-ième d'une composée, avec la formule de Faa di Bruno [‡]

$$(f\circ g)^{(n)}(x) = \sum_{1m_1+2m_2+\cdots+nm_n=n} \frac{n!}{m_1!\,1!^{m_1}\,m_2!\,2!^{m_2}\,\cdots\,m_n!\,n!^{m_n}} f^{(m_1+\cdots+m_n)}(g(x)) \prod_{j=1}^{n} \left(g^{(j)}(x)\right)^{m_j}$$

†. Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646 – 1716
‡. Francesco Faà di Bruno, 1825 – 1888

17.4 Exercices

Exercice 1. Étudier la continuité et la dérivabilité des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

b) $g : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

c) $h : x \mapsto x^x$

d) $i : x \mapsto |x|$

e) $j : x \mapsto x|x|$

f) $k : x \mapsto \sqrt{x^2 - x^3}$

Exercice 2. Calculer les dérivées des fonctions de l'exercice précédent.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Étudier

$$\lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$$

Exercice 4. Soit f la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & J \\ x & \longmapsto & \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{array}$$

a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à déterminer.
b) Montrer que $f' = 1 - f^2$, et en déduire la dérivée de f^{-1}.
c) Tracer les courbes de f et f^{-1}.

Exercice 5. Montrer que pour tout $x \neq 0$,

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x)$$

où $\operatorname{sgn}(x)$ est le signe de x (1 si $x > 0$, 0 si $x = 0$, -1 si $x < 0$).

Exercice 6. Montrer qu'une fonction dérivable dont la dérivée ne s'annule pas ne peut pas être périodique.

Exercice 7. Montrer que pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$e^x \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Exercice 8. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy.$$

Indication : on pourra montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9. *Théorème de Darboux*

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$.

a) Montrer que f admet un minimum sur $[a, b]$.

b) Montrer que ce minimum n'est atteint ni en a, ni en b.

c) Montrer $\exists c \in]a, b[,\ f'(c) = 0$.

d) En déduire que l'image d'un intervalle par f' est un intervalle.

Exercice 10. a) Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

b) *Règle de l'Hospital*

Soient f, g deux fonctions dérivables au voisinage d'un réel a, telles que $f(a) = g(a) = 0$, et avec $g, g' \neq 0$ au voisinage de a, sauf éventuellement en a.

Montrer que si $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x \to a]{} L \in \overline{R}$, alors $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} L$

Exercice 11. *Théorème de Rolle généralisé*

Soit $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R})$, telle que $\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = \ell$.

a) On suppose connue une fonction $\Phi :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ dérivable, surjective et telle que $\Phi' > 0$. On définit $\hat{f}$ par

$$\hat{f} : \begin{array}{ccl} [-1, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \ell & \text{si } x = 1 \text{ ou } -1 \\ f(\Phi(x)) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

En appliquant le théorème de Rolle à $\hat{f}$, montrer qu'il existe un réel c tel que $f'(x) = 0$.

b) Trouver une fonction Φ telle que dans la question précédente (on pourra chercher parmi celles des autres exercices...)