Chapitre 18

Variables aléatoires réelles finies

Dans tout ce chapitre, on travaille dans un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$.

18.1 Généralités sur les variables aléatoires réelles finies

Définition 18.1.1
On appelle variable aléatoire réelle finie sur l'univers Ω

On appelle alors univers image *ou* image *de cette variable l'ensemble*

EXEMPLE

On lance deux dés, un rouge et un bleu. On considère alors l'univers $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$.
Alors la fonction $X : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ i, j & \longmapsto & i + j \end{array}$ est une variable aléatoire, d'image $[\![2, 12]\!]$.

Définition 18.1.2
Soit X *une variable aléatoire réelle finie. Pour tout* $a \in \mathbb{R}$, *on notera*

- $[X = a] =$
- $[X \neq a] =$
- $[X < a] =$
- $[X > a] =$
- $[X \leqslant a] =$
- $[X \geqslant a] =$
- *Plus généralement,* $[X \in E] =$

EXEMPLE

Dans l'exemple précédent, on a $\mathbb{P}(X = 3) =$, $\mathbb{P}(X < 7) =$ et $\mathbb{P}(X \neq 2) =$.

Proposition 18.1.3
Soit X une variable aléatoire réelle finie sur Ω, d'image $\{a_1, \dots, a_n\}$. Alors l'ensemble

est un système complet d'événement.

Démonstration. Il est clair que la réunion de ces ensembles est incluse dans Ω. Soit donc $\omega \in \Omega$. Alors en posant $a_i = X(\omega)$, on a

On a donc bien $\Omega =$.

Ensuite, soient $i, j \in [\![1, n]\!]$ et $\omega \in [X = a_i] \cap [X = a_j]$. Alors

Les événements sont bien disjoints deux à deux, et donc forment bien un système complet d'événements. □

Définition 18.1.4
Soit X une variable aléatoire réelle finie sur Ω. On appelle loi de probabilité de X *ou simplement* loi de X *l'application*

NOTA

Il arrive parfois qu'on calcule la loi sur un ensemble plus gros que $X(\Omega)$: dans ce cas, on affecte la probabilité 0 aux événements qui ne sont pas dans l'image.

EXERCICE

Calculer la loi de la variable aléatoire de l'exemple, sous forme de tableau, puis de diagramme en bâtons.

Proposition 18.1.5
Soit X une variable aléatoire réelle finie, et soit E une partie finie de $\mathbb{R}$. Alors

$$\mathbb{P}(X \in E) =$$

Démonstration. C'est une simple application de la formule des probabilités totales. □

Définition 18.1.6
Soit X une variable aléatoire réelle finie sur Ω. On appelle fonction de répartition de X *la fonction*

NOTA

On note qu'on a donc

$$F_X(x) =$$

EXERCICE

Calculer la fonction de répartition de l'exemple des deux dés. Donner sa représentation graphique.

Proposition 18.1.7
La fonction de répartition de toute variable aléatoire réelle finie X est

Théorème 18.1.8
Soit X une variable aléatoire réelle finie sur Ω. La fonction de répartition de X décrit parfaitement sa loi. Plus précisemment :

- *si on connaît la loi de X, on peut trouver sa fonction de répartition :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) =$$

- *si on connaît la fonction de répartition de X, on peut trouver sa loi : si $X(\Omega) = \{a_1, \dots, a_n\}$ rangés dans l'ordre croissants, alors*

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ f_X(a_i) =$$

EXEMPLE

On lance toujours nos deux dés, mais on regarde la variable Y représentant le plus grand des deux numéros. Alors pour tout $i \in [\![1, 6]\!]$,

$$F_Y(i) =$$

les résultats des deux dés étant indépendants.
On en déduit la loi de Y :

$$\forall i \in [\![1,6]\!],\ f_Y(i) =$$

Proposition 18.1.9
Soit X une variable aléatoire réelle finie sur Ω. Soit g une fonction définie (au moins) sur $X(\Omega)$. Alors $g \circ X$, notée $g(X)$, est une variable aléatoire sur Ω.

Si $X(\Omega) = \{a_1, \dots, a_n\}$, alors $g(X)(\Omega) =$. Plus généralement

$$g(X)(\Omega) =$$

MÉTHODE :

Pour trouver la loi d'une fonction d'une variable aléatoire réelle finie $Y = g(X)$, on peut écrire pour tout $y \in Y(\Omega)$

$\mathbb{P}(Y = y) =$

EXERCICE

Pour la variable aléatoire Y de l'exemple précédent, calculer la loi de $(Y-3)^2$.

18.2 Espérance, variance et moments

Définition 18.2.1
Soit X une variable aléatoire réelle finie sur Ω. Si $k \in \mathbb{N}$, on appelle moment d'ordre k de *X le réel*

$$\mu_k(X) =$$

EXERCICE

Montrer que le moment d'ordre 0 d'une variable aléatoire réelle finie est toujours égal à 1.

On s'intéressera surtout aux moments d'ordre 1 et 2.

Définition 18.2.2
Soit X une variable aléatoire réelle finie sur Ω. On appelle espérance de X *le réel*

$$\mathbb{E}(X) =$$

L'espérance d'une variable aléatoire représente la moyenne du phénomène correspondant : on calcule en fait le barycentre de toutes les valeurs possibles, pondérées par leur probabilité.

EXEMPLE IMPORTANT

Soit X une variable aléatoire réelle finie constante, égale à c avec probabilité 1. Alors

$$E(X) =$$

EXERCICE

Calculer l'espérance des variables X et Y de l'exemple des deux dés.

Définition 18.2.3
Une variable d'espérance nulle est dite

Proposition 18.2.4
L'espérance est linéaire, c'est-à-dire que si X et Y sont des variables aléatoires réelles finies, et $a \in \mathbb{R}$, alors

$$\mathbb{E}(aX + Y) =$$

EXERCICE

Soit X une variable aléatoire réelle finie. Montrer que $X - \mathbb{E}(X)$ est une variable centrée.

Proposition 18.2.5
L'espérance d'une variable aléatoire réelle finie positive est . Plus précisement, si $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}_+$, alors

Démonstration. On a donc

$$\mathbb{E}(X) =$$

Chaque x étant positif, et les probabilités aussi, on a une somme de termes positifs, qui est donc positive. □

Proposition 18.2.6
L'espérance est croissante : si pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$, alors

Démonstration. La variable $Y - X$ est positive, et donc Par linéarité, □

On peut facilement calculer l'espérance de l'image d'une variable aléatoire, avec le théorème suivant.

Théorème 18.2.7 : de transfert
Soit X une variable aléatoire réelle finie sur Ω. Soit u une fonction définie (au moins) sur $X(\Omega)$. Alors

$$\mathbb{E}(u(X)) =$$

EXERCICE

Sans repasser par sa loi, calculer l'espérance de $(Y-3)^2$ de l'exemple.

Proposition 18.2.8
Soit X une variable aléatoire réelle finie, et soit $k \in \mathbb{N}$. Le moment d'ordre k de X est exactement

Définition 18.2.9
Soit X une variable aléatoire réelle finie sur Ω. On appelle variance de X *le réel*

$\mathbb{V}(X) =$

Une variable de vaariance 1 est dite

En pratique, on utilise rarement la définition de la variance : on utilise plutôt la formule suivante :

Proposition 18.2.10 : Formule de Koenig-Huygens
Soit X une variable aléatoire réelle finie sur Ω. Alors

$$\mathbb{V}(X) =$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser la linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

□

EXERCICE

Calculer la variance de X et Y pour nos deux dés.

Proposition 18.2.11
Soit X une variable aléatoire réelle finie sur Ω. Alors

- *La variance est positive :*
- *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,*

NOTA

Attention, la variance n'est pas linéaire !

Définition 18.2.12
Si X est une variable aléatoire réelle finie, son écart-type *est la racine carrée de sa variance :*

$$\sigma_X =$$

Proposition 18.2.13
Soit X une variable aléatoire réelle finie sur Ω. Alors la variable est une variable centrée réduite.

Voyons maintenant deux inégalités portant sur les espérance et variance d'une variable.

Proposition 18.2.14 : Inégalité de Markov *
Soit X une variable aléatoire réelle finie positive. Alors

∗. Андрей Андреевич Марков (Andreï Andreïevitch Markov), 1856 – 1922, Russe

Démonstration. Notons $X(\Omega) = \{a_1, \ldots, a_n\}$ rangés dans l'ordre croissant, et soit p tel que $a_p < a \leqslant a_{p+1}$.

$$\mathbb{E}(X) =$$

$$=$$

$$\geqslant$$

$$\geqslant$$

□

NOTA

Il faut noter que l'inégalité de Markov donne une majoration très grossière. Dans beaucoup de cas particulier, on peut facilement obtenir une majoration plus fine.

Corollaire 18.2.15
Soit X une variable aléatoire. Alors

Démonstration. L'inégalité de Markov appliquée à X^2 – qui est bien positive – donne

Comme $P(X^2 \geqslant a^2) =$, on a bien le résultat cherché. □

Proposition 18.2.16 : Inégalité de Bienaymé †-Tchebychev ‡
Soit X une variable aléatoire réelle finie. Alors

Démonstration. C'est le corollaire précédent appliqué à la variable $X - \mathbb{E}(X)$. □

NOTA

Cette inégalité confirme l'intuition qu'on a de la variance, c'est-à-dire que plus la variance est faible, plus les valeurs de X sont proches de son espérance.

†. Irénée-Jules Bienaymé, 1796–1878, Français
‡. Пафнутий Львович Чебышёв (Pafnouti Lvovitch Tchebychev), 1821–1894, Russe

18.3 Lois usuelles

Dans cette section, on va donner quelques lois usuelles à connaître, ainsi que leurs propriétés.

X est une variable aléatoire réelle finie sr Ω, d'image $X(\Omega) = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

18.3.1 Loi certaine

Définition 18.3.1
On dit que X *suit la* loi certaine

La fonction de répartition de la loi certaine est la suivante :

Son espérance vaut , et sa variance est .

EXERCICE

Montrer que la variance de X est nulle si et seulement si elle suit une loi certaine.

18.3.2 Loi uniforme

Cette loi sert à modéliser des phénomènes où toutes les issues sont équiprobables.

Définition 18.3.2
On dit que X *suit la* loi uniforme *si*

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(X = a_i) =$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}(X(\Omega))$.

Si $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$*, on note plutôt* $X \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$.

La fonction de répartition de la loi uniforme $\mathcal{U}(n)$ est la suivante :

Son espérance vaut

EXERCICE

Calculer la variance d'une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

18.3.3 Loi de Bernoulli

Cette loi sert à modéliser des phénomènes à deux issues, de probabilités respectives p et $q = 1 - p$. L'une sera appelée *succès*, et l'autre *échec*.

Définition 18.3.3
Soit $p \in [0, 1]$. On pose $q = 1 - p$.

On dit que X suit la loi binomiale de paramètre p si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et que

$$\mathbb{P}(X = 1) = \qquad \text{et } \mathbb{P}(X = 0) = \qquad .$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

La fonction de répartition d'une loi de Bernoulli est donnée par :

Son espérance vaut , et sa variance

EXEMPLE FONDAMENTAL

On note que si $A \subseteq \Omega$, alors la variable $\mathbb{1}_A$ suit une loi de Bernoulli de paramètre

18.3.4 Loi binomiale

Cette loi sert à modéliser une expérience qui consiste à compter le nombre de succès dans une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Définition 18.3.4
On dit que X suit une loi binomiale *de paramètres n et p si $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et*

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \ \mathbb{P}(X = i) =$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

La fonction de répartition d'une loi binomiale est donnée par :

Son espérance vaut , et sa variance

En effet :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \\
&= \\
&= \\
&= \\
&= \\
&= \\
&=
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \\
&= \\
&= \\
&= \\
&= \\
&= \\
&=
\end{aligned}$$

d'où par la formule de Koenig-Huygens

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 =$$

18.3.5 Loi hypergéométrique

Cette loi sert à modéliser ce genre de phénomènes :

- on divise N éléments en deux groupes respectivement à R et $N-R$ éléments
- on choisit au hasard et sans remise n éléments, puis on compte combien font partie du premier groupe.

Définition 18.3.5
Soient $N, n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.

On dit que X suit une loi hypergéométrique *de paramètres N, n et p si $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et*

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}(X=k) =$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N,n,p)$.

Son espérance vaut , et sa variance . En effet, en posant $R = pN$

$$\mathbb{E}(X) =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

Proposition 18.3.6 : Approximation de la loi hypergéométrique par une loi binomiale
Soit $X_N \hookrightarrow \mathcal{H}(N,n,p)$. Alors pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

Démonstration. Il suffit de noter que pour k et n fixés,

On a donc

$\mathbb{P}(X_N = k) \underset{N\to\infty}{\sim}$

□

Intuitivement, si N est grand, on peut assimiler le tirage sans remise à un tirage avec remise, et on se retrouve dans le cas d'une loi binomiale.

18.4 Exercices

Exercice 1. Une urne contient n boules dont r rouges et $b = n - r$ blanches. On a aussi un dé rouge à six faces parfait et un dé blanc à six faces truqué : 6 a une probabilité $\frac{1}{4}$ de d'apparaître, et les autres faces sont équiprobables entre elles.

On tire une boule de l'urne, et on lance le dé de la couleur obtenue. On note X la valeur obtenue.

a) Calculer la loi de X.

b) Déterminer l'espérance et la variance de X.

Exercice 2. On considère un dé truqué à six faces tel que la probabilité d'obtenir la face k est proportionnelle à k. On note X la variable aléatoire égale au numéro de la face obtenue.

a) Déterminer la loi de X, sa fonction de répartition, son espérance et sa variance.

b) Calculer la loi de $Y = \frac{1}{X}$, et son espérance.

c) Faire de même avec les variables $Z = (X-2) - (X-5)$ et $T = \left\lfloor \frac{X}{2} \right\rfloor$.

Exercice 3. Deux urnes contiennent chacune n boules numérotées de 1 à n. On prend une boule dans chaque urne, et on appelle X_n le plus grand des deux numéros obtenus.

a) Pour $k \in [\![0, n]\!]$, calculer $\mathbb{P}(X_n \leqslant k)$.

b) En déduire la loi de X_n.

c) Calculer $\mathbb{E}(X_n)$, et en donner un équivalent quand $n \to \infty$.

Exercice 4. Pour les variables suivantes, donner leur loi, leur espérance et leur variance :

a) Nombre de "Piles" au cours du lancer de vingt pièces truquées dont la probabilité d'obtenir "Face" est 0.7.

b) Nombre de carreaux dans le tirage de huit cartes dans un jeu de cinquante-deux.

c) Nombre de 6 dans un lancer de cinq dés.

d) Nombre de filles dans une famille de six enfants (la probabilité d'avoir une fille est 0.51).

e) Nombre de voix d'un candidat à une éléction présidentielle lors du dépouillement des cent premiers bulletins.

f) Nombre d'objet dans le premier tiroir si on en range vingt dans trois tiroirs.

g) Nombre de voyelles dans un mot de cinq lettres dont les lettres ont été tirées uniformément sans remise dans l'alphabet.

h) Nombre de bosses si on sort un animal d'un enclos contenant quinze lamas, quinze dromadaires et quinze chameaux.

i) Nombre de trèfles à quatre feuilles si on en cueille mille (la probabilité d'avoir un trèfle à quatre feuilles est de 0.01).

j) Nombre de femmes dans un jury de six personnes choisi parmi huit hommes et douze femmes.

k) Numéro tiré après l'expérience suivante : on choisit dix nombres dans $[\![1, 128]\!]$, puis un parmi les dix.

Exercice 5. On lance n fois une pièce équilibrée, les lancers étant indépendants. Déterminer le nombre de lancers nécessaires pour que la moyenne empirique du nombre de "Pile" obtenus soit dans l'intervalle $\left[\frac{n}{2} - 0.01, \frac{n}{2} + 0.01\right]$ avec une probabilité supérieure à 0.95.

Exercice 6. On considère une suite de tirages avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

On note X_p le nombre de numéros non sortis juste après le n-ième tirage.

a) Déterminer X_0 et X_1.

b) Soit maintenant $p \geqslant 2$.

i. Montrer que $X_p \leqslant N - 1$.

ii. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\mathbb{P}(X_p = k) = \frac{n-k}{n}\mathbb{P}(X_{p-1} = k) + \frac{k+1}{n}\mathbb{P}(X_{p-1} = k+1).$$

c) Montrer que la suite $(E(X_p))$ est géométrique, et donner son expression en fonction de p.

Exercice 7. Fonction génératrice des moments.

a) Soit Y une variable aléatoire définie sur Ω, à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. Soit G le polynôme

$$G = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(Y = k)X^k.$$

Montrer que $G(1) = 1$, $\mathbb{E}(Y) = G'(1)$ et $\mathbb{V}(Y) = G''(1) + G'(1)(1 - G'(1))$.

b) Utiliser le polynôme G pour retrouver l'espérance et la variance d'une loi binomialede paramètres p et $n \geqslant 2$.

Exercice 8. Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.

Une puce se déplace sur un axe gradué, aléatoirement d'une unité vers la droite ou la gauche aléatoirement. Elle se trouve initialement en 0.

On note X_n sa position après n sauts, et Y_n le nombre de sauts à droite après n sauts.

a) Donner la loi de Y_n, et en déduire la loi de X_n.

b) On suppose n pair. Quelle est la probabilité p_n que la puce revienne à son point de départ après n sauts ? Étudier la convergence de suite (p_n).

On pourra utiliser la formule de Stirling $n! \sim \frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}$.

c) Calculer l'espérance et la variance de X_n.

d) En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev, déterminer combien d'étapes n il suffit pour que la puce ne s'éloigne pas à plus de $\frac{n}{10}$ de l'origine, avec probabilité 95%.

Exercice 9. Soit la fonction

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ -x\ln(x) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}.$$

Pour une variable aléatoire X à valeurs dans $I_n = [\![0, n]\!]$, on appelle *entropie* de X le réel

$$H(X) = \sum_{i=0}^{n} h(\mathbb{P}(X = i)).$$

a) Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leqslant x - 1$, avec égalité si et seulement si $x = 1$.

c) Calculer l'entropie d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}(n)$.

d) Montrer que pour toute variable aléatoire X à valeurs dans I_n, $H(X) \geqslant 0$, et $H(X) = 0$ si et seulement si X suit une loi certaine.

e) On note $p_i = \mathbb{P}(X = i)$. Montrer que pour tout $i \in I_n$, on a

$$h(p_i) + p_i \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n+1} - p_i.$$

f) En déduire que $H(X)$ est toujours inférieur à l'entropie de la loi uniforme à valeurs dans I_n, avec égalité si et seulement si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$.