Chapitre 19

Développements limités

19.1 Comparaison de fonctions

Définition 19.1.1
Soient f et g définie sur un intervalle I, et soit a au voisinage de I, g ne s'annulant pas au voisinage de a. On dit que f est négligeable *devant g si*

On note alors $f = \underset{a}{\mathrm{o}}(g)$ ou $f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(g(x))$.

NOTA

Cette notion est à rapprocher de celle de fonctions équivalentes, où la limite doit être 1.

Proposition 19.1.2
Soient f et g définie sur un intervalle I, et soit a au voisinage de I, g ne s'annulant pas au voisinage de a. Alors

Démonstration. Si f et g sont équivalentes, alors

Inversement, c'est identique. $\square$

Notons qu'on peut réénoncer les croissances comparées :

Proposition 19.1.3
Soient $a, b > 0$. On a alors

-
-
-
-
-
-

On peut faire des opérations sur les relations de négligeabilité :

Proposition 19.1.4
On a, avec des notations évidentes :

- *Si $f = \underset{a}{o}(g)$ et $g = \underset{a}{o}(h)$, alors*
- *Si $f_1 = \underset{a}{o}(g)$ et $f_2 = \underset{a}{o}(g)$, alors pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$,*
- *Si $f_1 = \underset{a}{o}(g_1)$ et $f_2 = \underset{a}{o}(g_2)$, alors*
- *Si $f = \underset{a}{o}(g)$ et $h_1 \underset{a}{\sim} h_2$, alors*
- *Si $f = \underset{a}{o}(g)$ et $\alpha > 0$, alors*

19.2 Développements limités

Avec cette nouvelle relation, on peut réécrire des théorèmes vus dans les chapitres précédents.

Proposition 19.2.1
Soit f une fonction définie sur I. Soit $a \in I$. Alors

- *f est continue en a si et seulement si*
- *f est dérivable en a si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que*

  Dans ce cas, $\lambda = f'(a)$.

Dans ces deux cas, on approxime la fonction f au voisinage du point a par un polynôme, de degré respectivement 0 et 1. On va essayer de généraliser cette idée.

Définition 19.2.2
Soit f une fonction définie au voisinage de 0. *Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un* développement limité d'ordre n en 0 *($DL_n(0)$) s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que*

Dans ce cas, $P(x)$ est appelée partie régulière *du développement limité, et* $\mathrm{o}(x^n)$ *est appelé* reste.

EXEMPLE

Montrons que la fonction exponentielle admet un $DL_1(0)$. On sait déjà que $e^x - 1 \sim$,
et donc .

On a donc

de partie régulière

EXERCICE

Donner de la même manière un $DL_2(0)$ de la fonction cos.

On peut d'ores et déjà donner des développements limités à tout ordre de quelques fonctions :

Proposition 19.2.3
Les fonctions polynomiales admettent des développements limités à tout ordre en 0.

Démonstration. Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Deux cas se présentent :

- si $n > p$, alors on peut écrire

$$P(x) =$$

- si $n \leqslant p$, alors on peut écrire

$$P(x) =$$

□

Proposition 19.2.4
Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ *et* $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ *admettent des* $DL_n(0)$ *pour tout* n *:*

$$\frac{1}{1-x} =$$

$$\frac{1}{1+x} =$$

Démonstration. Faisons-le pour la première fonction. On a pour x au voisinage de 0 (en particulier, différent de 1) :

C'est clairement négligeable devant x^n. □

Les développements limités ont quelques propriétés intéressantes, héritées des polynômes :

Proposition 19.2.5
Si f *possède un* $DL_n(0)$*, alors il est unique. Plus précisemment, si* $f(x) = P(x) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$ *et* $f(x) = Q(x) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$ *avec* $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$*, alors*

Démonstration. On le prouve par récurrence sur n :

- Si $f(x) = a + \mathrm{o}(1) = b + \mathrm{o}(1)$, alors en faisant tendre x vers 0, on obtient tout de suite $a = b$.
- Supposons que $f(x) = P(x) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{n+1}\right)$ et $f(x) = Q(x) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{n+1}\right)$, $P = \sum\limits_{k=0}^{n+1} a_k X^k$ et $Q = \sum\limits_{k=0}^{n+1} b_k X^k$.
  Alors il est clair que

  et par hypothèse de récurrence, $a_k = b_k$ pour tout $k \leqslant n$.
  On en tire

  et en divisant par x^{n+1} et en faisant tendre x vers 0, on trouve $a_{n+1} = b_{n+1}$.

□

On en déduit en particulier :

Proposition 19.2.6
Si f admet un $DL_n(0)$, alors

- *si f est paire, alors*
- *si f est impaire, alors*

Démonstration. Il suffit d'écrire les développements limités de
, et de les identifier. □

EXEMPLE

Cherchons un développement limité de la fonction sin. Avec des équivalents, on sait que

$$\sin(x) =$$

Mais sin est impaire, et donc le coefficient de x^2 dans le $DL_2(0)$ sera nul. On en déduit :

$$\sin(x) =$$

Proposition 19.2.7
Si f admet un $DL_n(0)$, alors il admet un $DL_p(0)$ pour tout $p \leqslant n$, obtenu

Enfin, pour certaines fonctions, on peut être assurés de l'existence d'un $DL_n(0)$.

Théorème 19.2.8 : Formule de Taylor *-Young †
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I contenant 0.

Alors f admet un $DL_n(0)$, donné par

$$f(x) =$$

*. Brook Taylor, 1685–1731, Anglais
†. William Henry Young, 1863–1942, Anglais

NOTA

Attention, la réciproque est fausse : il existe des fonctions admettant des développements limités à l'ordre n, mais qui ne sont pas n fois dérivables.
Cette réciproque n'est vraie que dans les cas énoncés au début du chapitre, c'est-à-dire pour $n = 0$ et 1.

EXERCICE

Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un $DL_2(0)$, mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

19.3 Développements limités usuels

La formule de Taylor-Young nous donne les développements limités à tous ordres de quelques fonctions dont on connaît les dérivées.

Proposition 19.3.1
La fonction exp *admet un* $DL_n(0)$ *pour tout* n *donné par*

$e^x =$

Les fonction sin *et* cos *admettent un* $DL_n(0)$ *pour tout* n *donnés par*

$\cos(x) =$

$\sin(x) =$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$*, la fonction* $x \mapsto (1+x)^\alpha$ *admet un* $DL_n(0)$ *pour tout* n *donné par*

$(1+x)^\alpha =$

On note que le dernier cas couvre le cas de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, $x \mapsto \sqrt{1+x}$, *etc.*

19.4 Opérations sur les développements limités

À partir de ces quelques développements, on peut en déduire beaucoup d'autres par opérations. Regardons quels sont les opérations licites :

Proposition 19.4.1
Les développements limités de même ordre peuvent être ajoutés, multipliés ou composés. Plus précisemment, si f et g admettent des $DL_n(0)$ donnés par

$$f(x) = P(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \text{ et } g(x) = q(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n),$$

alors :

- *$f+g$ admet un $DL_n(0)$, donné par*

  $$f(x)+g(x) =$$

- *pour $\lambda \in \mathbb{R}$, λf admet un $DL_n(0)$ donné par*

  $$\lambda f(x) =$$

- *fg admet un $DL_n(0)$, donné par*

  $$f(x)g(x) =$$

  où

- *si $f(0) = 0$, alors $g \circ f$ admet un $DL_n(0)$ donné par*

  $$g(f(x)) =$$

  où

NOTA

Si les deux développements limités ne sont pas au même ordre, on gardera seulement le plus petit ordre, en tronquant l'autre.

EXERCICE

Donner un $DL_3(0)$ de $\sin + 2\cos$, $\sin\cos$ et $e^{\sin}$.

Proposition 19.4.2
Avec les notations précédentes, si $g(0) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ admet un $DL_n(0)$, calculé en écrivant

$$\frac{1}{g(x)} =$$

où

Quand on fait ces opérations "à la main", il faut se rappeler de la règle suivante : les puissances de x supérieures à celle dans le "petit o" se font absorber ; si $p > n$, $x^p + o(x^n) = o(x^n)$. Il est donc inutile de les écrire.

On peut aussi intégrer des développements limités, ce qui nous donnera d'autres développements usuels à connaître :

Proposition 19.4.3
Si f admet un $DL_n(0)$ de partie régulière $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, et si F est une primitive de f, alros F admet un $DL_{n+1}(0)$ donné par

$$F(x) =$$

NOTA

Attention, on ne peut pas dériver les développements limités.

On en déduit les $DL_n(0)$ de fonctions usuelles :

Proposition 19.4.4
La fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ admet un $DL_n(0)$ pour tout n, donné par

$$\ln(1-x) =$$

La fonction arctan *admet un $DL_{2n+1}(0)$ pour tout n, donné par*

$$\arctan(x) =$$

Démonstration. En exercice : il suffit de prendre les primitives de $DL_n(0)$ de $x \mapsto \frac{-1}{1-x}$ et de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. □

19.5 Généralisation au développements limités en d'autres points que 0

Si $a \in \mathbb{R}$, on peut aussi parler de développements limités au voisinage de a : f admet un $DL_n(a)$ si on peut écrire

$$f(x) =$$

où $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

Tous les résultats vus restent vrais, mais on préférera toujours se ramener à des développements limités en 0.

MÉTHODE :

> Pour se ramener en 0, on fait le changement de variable
>
> On remplace tous les x par $X + a$, puis on fait le développement limité par rapport à X, en 0.
> Finalement, on remplace les X par $x - a$ (sans développer).

EXEMPLE

On veut le $DL_2(2)$ de ln. On pose alors $X = x - 2$, soit $x = X + 2$. Soit donc $f : x \mapsto \ln(X + 2)$. On a

$$\ln(x) =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

Dans le cas de développements limités au voisinage de $\pm\infty$, on parle plutôt de développement asymptotique. De la même façon, on se ramène en 0 en posant $X = \frac{1}{x}$, $X \to 0$.

EXEMPLE

On veut un développement d'ordre 2 au voisinage de $+\infty$ de $\frac{1+x}{x-1}$. On pose $X = \frac{1}{x}$, et on pose $f : X \mapsto \frac{1+\frac{1}{X}}{\frac{1}{X}-1}$. On a alors

$$\frac{1+x}{1-x} =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

19.6 Applications des développements limités

Tout d'abord, les développements limités permettent de calculer des limites et équivalents de fonctions, de façon plus souple qu'en utilisant seulement les équivalents, qui ne peuvent être ni ajoutés, ni composés.

Proposition 19.6.1
Soit f un fonction ayant un $DL_n(a)$. Alors f est équivalente au premier terme (de plus petit degré) non nul de la partie régulière.

On peut aussi étudier les tangentes à la courbe en un point a.

Proposition 19.6.2
Soit f une fonction admettant un $DL_n(a)$, $n \geqslant 1$:

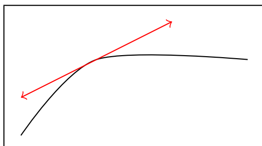
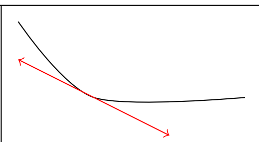
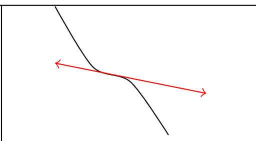
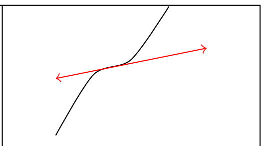
$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \sum_{k=2}^{n} a_k x^k + \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\left((x-a)^n\right).$$

Alors la partie régulière du $DL_1(a)$ de f donne l'équation de la tangente à la courbe au point a :

$$y = a_0 + a_1(x-a).$$

De plus, si p est l'indice du premier coefficient non nul strictement supérieur à 1, alors

Cette proposition nous permet de calculer des tangentes, et d'étudier les positions relatives de la courbe et de sa tangente :

p pair, $a_p < 0$	p pair, $a_p > 0$	p impair, $a_p < 0$	p impair, $a_p > 0$
			

Au voisinage de ∞, on parle alors de *branches infinies*.

Définition 19.6.3
Soit f une fonction définie au voisinage de ∞, de courbe $\mathcal{C}_f$.

- *si* $\lim_\infty f = \ell \in \mathbb{R}$*, on dit que* $\mathcal{C}_f$ *admet une asymptote horizontale* $y = \ell$

- *si* $\lim_\infty f = \pm\infty$, *alors*
  - *si* $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, *on dit que* $\mathcal{C}_f$ *admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées*
  - *si* $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, *on dit que* $\mathcal{C}_f$ *admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses*
  - *si* $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$
    * *si* $\lim_{x\to\infty} f(x) - ax = \pm\infty$, *on dit que* $\mathcal{C}_f$ *admet une branche parabolique de direction la droite d'équation* $y = ax$
    * *si* $\lim_{x\to\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$, *on dit que* $\mathcal{C}_f$ *admet une asymptote d'équation* $y = ax + b$

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto 2x - 1 - \sqrt{x^2 - 4x}$. Un développement au voisinage de ∞ donne

$$f(x) =$$

f admet donc la droite d'équation $y = x + 1$ comme asymptote au voisinage de ∞, et la courbe de f est au-dessus de cette asymptote.
De même, on obtient en $-\infty$

$$f(x) =$$

donc f admet la droite d'équation $y = 3x - 3$ comme asymptote au voisinage de $-\infty$, et la courbe est au-dessus de la tangente.

19.7 Exercices

Exercice 1. Déterminer le développement limité des fonctions suivantes en 0

a) $e^x - \frac{1}{1-x}$, ordre 2

b) $\sqrt[3]{1+x+x^2}$, ordre 2

c) $\cos(\sqrt{x})$, ordre 5

d) $\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$, ordre 1

e) $(\cos x)^{\sin x}$, ordre 5

f) $(1+x)^{\frac{1}{x}}$, ordre 2

g) $\sin x - x\cos x$, ordre 8

h) $2^x - 1$, ordre 2

i) $e^{\sqrt{1+x}}$, ordre 3

j) $\tan^2(x)$, ordre 6

k) $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$, ordre 4

l) $\frac{1+x}{(1-x)^3}$, ordre 3

m) $\ln(1+\cos(2x))$, ordre 4

n) $\frac{x+1}{x^2+x+2}$, ordre 3

o) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$, ordre 4

p) $\cos\left(\frac{\pi x}{2\tan x}\right)$, ordre 4

q) $(1+\arctan x)^{\frac{1}{x}}$, ordre 3

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en 0, avec $f(0) = 0$. Déterminer la limite de la suite

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, positive. Donner une CNS pour que $\sqrt{f}$ soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Montrer que pour tous $0 \leqslant \ell \leqslant n$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(1)^{n-k}k^\ell}{\ell!} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell < n \\ 1 & \text{si } \ell = n \end{cases}$$

(on pourra utiliser la fonction $(e^x-1)^n$).

Exercice 5. Déterminer le DL à l'ordre 1000 en 0 de $\ln\left(\sum_{k=0}^{999} \frac{x^k}{k!}\right)$.

Exercice 6. Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{frac1x}-1} \end{array},$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Étudier la régularité de f, ses variations, l'allure de la courbe au voisinage de 0 et ses asymptotes.

Exercice 7. Soit f la fonction définie par $f(x) = \arctan(\ln(1+x))$.

a) Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, \infty[$.

b) Donner un $DL_3(0)$ de f.

c) Montrer que f est bijective sur un intervalle à préciser.

d) Déterminer un $DL_3(0)$ de f^{-1}.

Exercice 8. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le DL à l'ordre $2n+2$ en 0 de $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

Exercice 9. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}.$$