# Chapitre 1

# Logique et Ensembles

## 1.1 Un peu de logique

Dans cette première section de ce premier chapitre, nous allons essayer [*] de fixer une fois pour toutes les notions de *preuve* et de *vérité*, ces deux notions étant évidemment centrales en mathématiques.

### 1.1.1 Propositions

Nous allons tout au long de l'année étudier des formules logiques, par exemple « $1 + 1 = 2$ », « Tous les nombres entiers sont pairs » ou encore « $\exists! f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in \mathbb{R}, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ ».

Seules certaines propriétés sont « étudiables », et nous allons voir dans la suite comment former des formules valides.

Les formules que nous étudierons seront soit vraies, soit fausses, et nous nous intéresserons particulièrement à celles qui sont vraies : on leur donnera plusieurs noms suivant le contexte :

- *Proposition* :
- *Théorème* :
- *Lemme* :
- *Corollaire* :

Dans la suite, nous noterons $P$, $Q$, *etc.* des formules quelconques.

NOTA

On se contentera de dire simplement « $P$ » au lieu de « $P$ est vraie », de la même façon qu'on ne dit pas « $1 + 1 = 2$ est vraie ».

[*]. Attention : ceci n'est pas un cours de logique, et nous nous contenterons donc de survoler les notions

Nous allons maintenant voir comment écrire et démontrer des formules.

### 1.1.2 Équivalence

**Définition 1.1.1**
*Soient $P$ et $Q$ deux formules logiques. On peut alors définir une nouvelle formule logique, notée , qui se lit*
*, qui est vraie lorsque*

EXEMPLE

Les formules suivantes sont vraies :

- 
- 

On peut faire des tables de vérités pour voir la véracité d'une formule logique (on notera 1 pour « vrai » et 0 pour « fausse »).

| $P$ | $Q$ | $P \Leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | |
| 0 | 1 | |
| 1 | 0 | |
| 1 | 1 | |

**Proposition 1.1.2**
*Deux formules logiques sont équivalentes si et seulement si*

### 1.1.3 Négation

**Définition 1.1.3**
*Soit $P$ une formule logique. On appelle*
*la formule logique qui est vraie si et fausse si*

| $P$ | non $P$ |
|---|---|
| 0 | |
| 1 | |

### 1.1.4 Conjonction et disjonction

**Définition 1.1.4**
*Soient $P$ et $Q$ deux formules logiques. On appelle*
*la formule logique, notée qui est vraie si*

| $P$ | $Q$ | $P$ et $Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | |
| 0 | 1 | |
| 1 | 0 | |
| 1 | 1 | |

Autrement dit, dès qu'une des deux formules est fausse, leur conjonction est toujours fausse.

MÉTHODE :

Pour montrer qu'une conjonction $P$ et $Q$ est vraie, il suffit de montrer $P$, puis de montrer $Q$.

**Définition 1.1.5**
*Soient $P$ et $Q$ deux formules logiques. On appelle*
*la formule logique, notée qui est vraie si*

| $P$ | $Q$ | $P$ ou $Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | |
| 0 | 1 | |
| 1 | 0 | |
| 1 | 1 | |

Autrement dit, dès qu'une des deux formules est vraie, leur disjonction est vraie. Il est donc particulièrement difficile de démontrer une disjonction, puisqu'il faut commencer par choisir quelle proposition il faut démontrer.

MÉTHODE :

Pout montrer qu'une disjonction $P$ ou $Q$ est vraie, il faut montrer soit $P$, soit $Q$.

Si le choix n'est pas évident, une autre méthode consiste à supposer que $P$ est fausse, et montrer que nécessairement $Q$ est vraie †.

### 1.1.5 Implication

La plupart des énoncés mathématiques sont en fait de la forme *si ... alors ...* : ce sont des implications.

**Définition 1.1.6**
*Soient $P$ et $Q$ deux formules logiques. On appelle*
*notée* *la formule logique qui est vraie sauf si*

*Dans cette formule, $P$ s'appelle le* *ou l'* *, et $Q$ s'appelle la*

| $P$ | $Q$ | $P \Rightarrow Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | |
| 0 | 1 | |
| 1 | 0 | |
| 1 | 1 | |

Autrement dit, l'implication est vraie si dès que $P$ est vraie, $Q$ est vraie aussi.

NOTA

On note qu'une implication est automatiquement vraie si le prémisse est faux; on donne un nom à cette règle :

MÉTHODE :

Pour montrer qu'une implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, il faut

- 
- 

**Proposition 1.1.7**
*Soient $P$ et $Q$ deux formules logiques. Alors l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$ est équivalente à la formule*

*Démonstration.* Il suffit de faire la table de vérité des deux formules :

| $P$ | $Q$ | $P \Rightarrow Q$ | $Q \Rightarrow P$ | $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$ | $P \Leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | | | |
| 0 | 1 | | | | |
| 1 | 0 | | | | |
| 1 | 1 | | | | |

□

On obtient donc une méthode pour montrer une équivalence :

MÉTHODE :

Pour montrer une équivalence $P \Leftrightarrow Q$, il faut :

- 
- 

### 1.1.6 Tautologies

Certains résultats sont toujours vrais, quelques soient les propositions impliquées : on les appelle *tautologies*. Nous allons en voir quelques unes maintenant.

**Proposition 1.1.8**
*Soient $P, Q, R$ des formules logiques quelconques. Alors les formules suivantes sont des tautologies :*

*Pour l'équivalence :*

- 
- 

*Pour la conjonction :*

- 

- 
- 

*Pour la disjonction :*

- 
- 
- 

*Pour la négation :*

- 
- 
- 

**Proposition 1.1.9 : Lois de De Morgan** [‡]
*Soient $P$ et $Q$ deux formules logiques. Alors*

- 
- 

‡. Auguste De Morgan, 1806 – 1971, Britannique

**Proposition 1.1.10 : Distributivité**
*Soient $P, Q, R$ trois formules logiques. Alors*

- 

- 

La négation inverse donc la disjonction et la conjonction ; le contraire d'un "ou" est un "et", et le contraire d'un "et" est un "ou".

**Proposition 1.1.11 : Contraposition**
*Soient $P$ et $Q$ deux formules logiques. Alors les implications et sont équivalentes.*

MÉTHODE :

> Pour montrer une implication du type $P \Rightarrow Q$, on peut donc indifféremment ou alors
>
> En particulier, pour montrer une équivalence, on peut montrer que

**Proposition 1.1.12 : Raisonnement par l'absurde**
*Soient $P$ et $F$ deux formules logiques, la formule $F$ étant toujours fausse[§]. Alors la formule suivante est une tautologie*

MÉTHODE :

> Pour prouver une formule $P$, il suffit donc de montrer

§. de façon équivalente, la formule (non $F$) est une tautologie

### 1.1.7 Quantificateurs

Les formules logiques peuvent aussi dépendre de paramètres, par exemple la formule $x = x^2$ dépend d'un certain $x$, et peut être vraie pour certaines valeurs de $x$ et pas pour d'autres : on parle alors de *prédicat*. À partir de prédicats, on peut former d'autres formules :

**Définition 1.1.13**
*Si $P(x)$ est un prédicat dépendant d'un paramètre $x$ d'un certain ensemble $I$, alors la formule suivante*

*est une formule logique, qui est vraie si*

*Le symbole $\forall$ est appelé et se lit "pour tout" ou "quelque soit".*

NOTA

Un prédicat peut aussi dépendre de plusieurs paramètres $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p$. Si tous ces paramètres appartiennent au même ensemble $I$, on s'autorisera à écrire

$$\forall x_1, \ldots, x_p \in I,\ P(x_1, \ldots, x_p)$$

au lieu de

$$\forall x_1 \in I,\ \forall x_2 \in I,\ \cdots, \forall x_p \in I,\ P(x_1, \ldots, x_p).$$

MÉTHODE :

Pour montrer une formule du type $\forall x \in I,\ P(x)$, il faut :

- 
- 

La démonstration aura donc la structure suivante :

$\vdots$

NOTA

On note que toute formule logique du type est vraie, puisqu'il n'y a pas d'éléments dans l'ensemble vide.

**Définition 1.1.14**
*Si $P(x)$ est un prédicat dépendant d'un paramètre $x$ d'un certain ensemble $I$, alors la formule suivante*

*est une formule logique, qui est vraie si*

*Le symbole $\exists$ est appelé et se lit "il existe".*

*De la même façon, la formule*

*est une formule logique, qui est vraie si $P(x)$ est vraie pour exactement une valeur possible de $x$.*

*Le symbole $\exists!$ se lit "il existe un unique".*

MÉTHODE :

Il est souvent très difficile de montrer une formule du type $\exists x \in E,\ P(x)$, puisqu'il faut commencer par trouver la bonne valeur qu'il faut choisir pour $x$.
En revanche, pour montrer une formule du type $\exists! x \in E,\ P(x)$, il faut¶ montrer séparemment l'existence et l'unicité

-
-

NOTA

Attention ! L'ordre des quantificateurs dans une formule logique est primordial. Par exemple, les deux formules

ne veulent pas dire la même chose ; l'une est toujours vraie, l'autre est toujours fausse

EXERCICE

Le prouver.

### 1.1.8 Négation d'une formule logique

On a vu qu'il y a des méthodes de preuve qui demande de calculer la négation d'une formule logique (la méthode par contraposée, la méthode par l'absurde). Il faut donc savoir comment nier une formule.

La méthode est de le faire petit à petit :

- La négation de $\forall x \in E,\ P(x)$ est
- La négation de $\exists x \in E,\ P(x)$ est
- La négation de $(\text{non } P)$ est
- La négation de $(P \text{ et } Q)$ est
- La négation de $(P \text{ ou } Q)$ est
- La négation de $(P \Rightarrow Q)$ est

EXEMPLE

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. Nions la proposition suivante :

$$P : \text{"}\exists \ell \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in N,\ n > N \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon\text{"}.$$

On procède par étapes :

- On veut $(\text{non } P)$
- On a donc
- D'où
- D'où
- D'où
- D'où
- D'où finalement la négation de $P$ :

## 1.2 Théorie naïve des ensembles

Nous utiliserons cette année beaucoup d'*ensembles*. Si c'est une notion très compliquée en mathématiques, nous nous contenterons‖ de considérer qu'un ensemble est une "collection" d'objets mathématiques (nombres, fonctions, *etc.* ou même ensembles).

On écrira alors $x \in E$ pour indiquer que l'objet $x$ est un des objets de la collection $E$, et on dira que *$x$ appartient à $E$*.

Il y a trois façons différentes de décrire des ensembles :

- En listant explicitement ses éléments, entre accolades et séparés par des virgules ou points-virgules

  EXEMPLE

- En listant ses éléments comme l'image d'un ensemble par une fonction

  EXEMPLE

- En donnant une propriété qui caractérise ses éléments

  EXEMPLE

Il existe un ensemble qu'on verra souvent :

**Définition 1.2.1**
*On appelle noté l'ensemble qui ne contient aucun élément.*

### 1.2.1 Opérations sur les ensembles

On va voir ici qu'on peut tout faire sur les ensembles en utilisant la section précédente sur les connecteurs logiques.

‖. et nous passerons sous silence les paradoxes induits par cette théorie naïve des ensembles

**Définition 1.2.2**
*On dit que deux ensembles sont égaux s'ils ont les même éléments ; autrement dit, si $A$ et $B$ sont deux ensembles, alors $A = B$ si*

MÉTHODE :

Ceci nous donne une méthode pour montrer une égalité d'ensembles : il suffit de montrer que tout élément du premier est élément du deuxième, puis que tout élément du deuxième est élément du premier.
La démonstration ressemblera à :

$\vdots$

$\vdots$

**Définition 1.2.3**
*Soient $A$ et $B$ deux ensembles. On dit que*
*noté $A \subseteq B$ si*

EXEMPLE

On note que est inclu dans n'importe quel autre ensemble.

MÉTHODE :

Pour montrer une inclusion, la démonstration sera donc du type :

$\vdots$

NOTA

On note donc que pour montrer une égalité d'ensembles $A = B$, il faut

**Définition 1.2.4**
*Soient $A$ et $B$ deux ensembles inclus dans un ensemble $E$. On appelle*
*notée* *l'ensemble des éléments qui sont*

$$A \cap B =$$

En revenant aux formules logiques, on a donc

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow$$

**Définition 1.2.5**
*Soient $A$ et $B$ deux ensembles inclus dans un ensemble $E$. On appelle*
*notée* *l'ensemble des éléments qui sont*

$$A \cup B =$$

En revenant aux formules logiques, on a donc

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow$$

**Définition 1.2.6**
*Soient $E_1, \ldots, E_p$ des ensembles. On définit alors l'intersection et l'union des $E_p$ par*

$$\bigcap_{i=1}^{p} E_i = E_1 \cap \cdots \cap E_p =$$

$$\bigcup_{i=1}^{p} E_i = E_1 \cup \cdots \cup E_p =$$

**Définition 1.2.7**
*Soient $A$ et $E$ deux ensembles, avec $A \subseteq E$. On appelle*
*noté*** *l'ensemble des éléments*

$$\overline{A} =$$

*Si $A$ n'est pas nécessairement inclu dans $B$, on note* *l'ensemble des éléments*

$$A \backslash B =$$

**. on note que $E$ n'apparaît pas, rendant la notation dangereuse

En revenant aux formules logiques, on a donc

$$\forall x \in E,\ x \in \overline{A} \Leftrightarrow$$

et

$$x \in A \backslash B \Leftrightarrow$$

NOTA

On note qu'on peut faire correspondre la conjonction, le quantificateur $\forall$ et l'intersection, et la disjonction, le quantificateur $\exists$ et l'union, et la négation et le complémentaire :

| Connecteur | Quantificateur | Opérateur |
|---|---|---|
| et | $\forall$ | $\cap$ |
| ou | $\exists$ | $\cup$ |
| non | | complémentaire |

Les propriétés vues pour le connecteurs logiques restent donc vraies pour les ensembles

**Proposition 1.2.8**
*Soient $A$, $B$, $C$ trois sous-ensembles d'un ensemble $E$. Alors*

-
-
-
-

**Définition 1.2.9**
*Soit $A$ un ensemble. On appelle*
*noté* *l'ensemble des*

$$B \in \mathfrak{p}(A) \Leftrightarrow$$

EXEMPLE

Soit $A = \{1, 2, 3\}$. Alors
$\mathfrak{p}(A) =$

NOTA

On note que dans tous les cas, et

**Définition 1.2.10**

*Soient $A$ et $B$ deux ensembles. On appelle*
*noté l'ensemble des*

$$A \times B =$$

*On peut généraliser à $p$ ensembles $E_1, \ldots, E_p$ :*

$$\prod_{i=1}^{p} E_i = E_1 \times \cdots \times E_p =$$

*Si tous les $E_i$ sont le même ensemble $E$, alors on note plutôt*

## 1.3 Exercices

**Exercice 1.** Les expressions suivantes sont-elles toujours vraies, toujours fausses, ou parfois vraies parfois fausses ?

(i) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \text{ et } B) \Rightarrow C$

(ii) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$

(iii) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow A$

**Exercice 2.** Écrire sous forme de formule logique les énoncés suivants, puis écrire leur négation

a) $n$ est un nombre pair

b) Il existe un réel strictement négatif dont le carré est positif

c) La fonction $f$ est majorée sur $I$

d) La fonction $f$ est croissante sur $I$

e) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire (*i.e.* constante à partir d'un certain rang).

**Exercice 3.** Soit $P$ la proposition « Tout entier naturel peut s'écrire comme somme de carrés de deux entiers naturels ».

(i) Écrire $P$ comme formule logique

(ii) Écrire la négation de $P$ comme formule logique

(iii) $P$ est-elle vraie ou fausse ?

**Exercice 4.** Sur une île, on distingue deux types de gens :

- Les Sincères, qui disent tout le temps la vérité ;
- Les Menteurs, qui ne disent jamais la vérité.

On prend deux personnes aux hasard sur l'île : Alice et Bob.

On note $A$ la variable "Alice est Sincère", et $B$ la variable "Bob est Sincère".

Dans les deux cas suivants, traduire l'énoncé en terme de formule logique, et dire si Alice et Bob sont Sincères ou Menteurs :

(i) Bob dit : "Nous sommes tous les deux des Menteurs".

(ii) Alice dit : "Je ne suis ni une Sincère, ni une menteuse". Bob ajoute "C'est vrai".

**Exercice 5.** Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble. Peut-on écrire :

(i) $a \in E$

(ii) $a \subset E$

(iii) $\{a\} \subset E$

(iv) $\emptyset \in E$

(v) $\emptyset \subset E$

(vi) $\{\emptyset\} \subset E$ ?

**Exercice 6.** (i) Soient $A = B = \{1,2\}$. Calculer $\mathfrak{p}(A \times B)$.

(ii) Soient $E = \{1,2,3,4\}$, $A = \{(i,j) \in E^2 \mid i < j\}$, $B = \{(i,j) \in E^2 \mid i = j\}$ et $C = \{(i,j) \in E^2 \mid i > j\}$. Montrer que $\{A, B, C\}$ est une partition de $E^2$ (*i.e.* que leur réunion est exactement $E^2$, et qu'ils sont disjoints deux à deux).

**Exercice 7.** Soient $A$ et $B$ deux ensembles. Montrer que

$$A \subset B \Rightarrow \mathfrak{p}(A) \subset \mathfrak{p}(B).$$

Que dire de la réciproque ?

**Exercice 8.** Montrer qu'il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles.