Chapitre 20

Espaces Vectoriels

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

20.1 Définitions

Dans cette section, on va voir la définition génerale d'espace vectoriel. Cette section peut être oubliée pour l'instant, mais tout ceci est au programme de seconde année.

Définition 20.1.1
Soit E un ensemble.

On appelle loi de composition interne *toute fonction* $+ : E \times E \to E$.

On dit que cette loi :

- *admet un élément neutre si*
- *est commutative si*
- *est associative si*
- *est symétrisable si*

Un ensemble avec une loi vérifiant ces propriétés est appelé

EXEMPLE

On peut donner des exemples de groupes abélien :

Les ensembles $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}^2$ semblent plus forts qu'un simple groupe : on peut aussi multiplier leurs éléments par des réels.

Définition 20.1.2
Soit E un groupe avec son opération $+$ et son neutre 0. On suppose qu'il existe une opération $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ telle que

-
-
-
-

On dit alors que E muni de $+$ et de $\cdot$ est un

Les éléments de E sont appelés , et ceux de $\mathbb{K}$.

NOTA

On note qu'on ne montrera presque jamais qu'un ensemble est un espace vectoriel en utilisant cette définition. On aura plutôt un catalogue d'espaces usuels, ainsi que des moyens d'en obtenir d'autres à partir d'un espace vectoriel déjà connu.

EXEMPLE

On peut citer comme espaces vectoriels :

-
-
-
-
-

Définition 20.1.3
On appelle combinaison linéaire *de E toute somme finie de la forme*

où les $\lambda_k \in \mathbb{K}$ et $x_k \in E$.

Proposition 20.1.4
Un espace vectoriel est stable par combinaison linéaire.

Démonstration. Par récurrence sur n. □

Proposition 20.1.5
Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$. Alors

-
-

Dans la suite, on travaillera exclusivement dans les espaces $\mathbb{K}^n$. Il faut cependant garder à l'esprit que cela peut se passer de la même manière dans d'autres espaces vectoriels.

20.2 L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$

On travaille maintenant dans les espaces $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ fixé ; pour les résultats valables dans les deux espaces, on notera $\mathbb{K}^n$.

20.2.1 Sous-espaces vectoriels

Définition 20.2.1
Soit $F \subseteq \mathbb{K}^n$. On dit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ si F est un espace-vectoriel.

Proposition 20.2.2
F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ si :

-
-
-

EXEMPLE

L'ensemble F des vecteurs de $\mathbb{C}^3$ dont la dernière composante est nulle est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$. En effet,

-
- soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $u = (a, b, 0), v = (c, d, 0) \in \mathbb{C}^3$. Alors

NOTA

Quand on demandera de montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, il s'agira presque toujours de montrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace connu. Ainsi, il n'y a que ces trois propriétés à vérifier.

Proposition 20.2.3
Toute intersection (finie ou non) de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Démonstration. Soient $(F_i)_{i\in I}$ des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$. On pose $F = \bigcap\limits_{i\in I} F_i$.

Vérifions les propriétés :

-
-
-

□

NOTA

Attention : une union de sous-espaces vectoriels n'est presque jamais un espace vectoriel. Par exemple soient les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$

$$F = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \text{ et } G = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Alors

Proposition 20.2.4
Si F et G sont des sous-espaces vectoriels, alors $F+G =$
est un sous-espace vectoriel.

Démonstration. Il est clair que $0 \in F+G$.

Soient $u = u_F + u_G$ et $v = v_F + v_G$ dans $F+G$. Alors

De plus, □

Proposition – Définition 20.2.5
Soient $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{K}^n$. On appelle sous-espace vectoriel engendré par *$u_1, \dots, u_k$ le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ contenant $u_1, \dots, u_k$.*

Il noté $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ *est donné par*

$$\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k) =$$

Il y a donc plusieurs façons de décrire un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$:

- L'écriture *vectorielle*, où on décrit F par l'ensemble des vecteurs dont il est l'espace engendré
$$F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k)$$
- L'écriture *paramétrique*, où on décrit F comme un ensemble de combinaisons linéaires
$$F = \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k \mid \lambda_i \in \mathbb{K}\}$$
- L'écriture cartésienne, on on décrit F comme l'ensemble des solutions d'une ou plusieurs équations
$$F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \text{systeme d'équation}\}.$$

Les écritures paramétrique et vectorielle sont en fait identiques. Voyons donc comment passer de ces écritures à l'écriture cartésienne.

MÉTHODE :

Pour passer de l'écriture cartésienne à l'écriture vectorielle :

-
-
-

Pour passer de l'écriture vectorielle à l'écriture cartésienne :

- Si $F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$, on écrit tout vecteur $u = (x_1, \dots, x_n)$ comme
-
-

EXEMPLE

Posons $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 3z = 0\}$. Le système est déjà échelonné : on peut trouver des solutions en fixant deux variables et en en déduisant l'autre.

Pour $x = 1$ et $y = 0$, on obtient $z = 3$, et donc
Pour $x = 1$ et $z = 0$, on obtient $y = -1$, et donc
On en déduit $F =$.
Inversement, si on partait de cette écriture, on commence par prendre $u = (x, y, z) \in F$.
Il existe donc λ et μ tels que

$u =$

On considère donc le système

Une équation cartésienne de F est donc

20.3 Familles de vecteurs

On se place toujours dans l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, mais la plupart des résultats seront transposables dans le cas d'espaces vectoriels quelconques en deuxième année.

20.3.1 Familles libres

Définition 20.3.1
Soit $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On dit que la famille est :

-
-

Théorème 20.3.2
Une famille $\{u_1, \ldots, u_m\}$ est libre si et seulement si

Démonstration. D'après la définition, la famille est liée si et seulement s'il existe un i et des α_k tels que

$$u_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j u_j.$$

Supposons la famille liée. Alors il existe bien des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que

Réciproquement, supposons qu'il existe des tels scalaires. Soit alors i tel que $\lambda_i \neq 0$. On a alors

$$u_i =$$

et on conclut en posant $\alpha_j =$ □

MÉTHODE :

Pour étudier la liberté d'une famille :

-
-
-

EXEMPLE

Montrons que les vecteurs $(1,2,3)$ et $(4,5,6)$ sont linéairement indépendants. Soient donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda(1,2,3) + \mu(4,5,6) = 0.$$

On obtient alors le système

On le résout avec la méthode de Gauss, et on trouve $\lambda = \mu =$; les vecteurs sont bien linéairement indépendants.

EXEMPLE

Montrons que la famille $\{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\}$ est liée. On remarque que

et donc la famille est bien liée : un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Proposition 20.3.3
Une famille de un vecteur est libre si et seulement si

Une famille de deux vecteurs est libre si et seulement si

Démonstration. En exercice. □

Proposition 20.3.4
Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ *une famille libre de* $\mathbb{K}^n$. *Alors*

20.3.2 Familles génératrices

Définition 20.3.5
Soit $\{u1, \ldots, u_p\}$ *une famille de vecteurs de* $\mathbb{K}^p$. *Soit* F *sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^p$.

On dit que cette famille est génératrice de F *si*

MÉTHODE :

Pour montrer qu'une famille est génératrice :

-
-
-
-

EXERCICE

Montrer que la famille composée de $u_1 = (1,0,1,0)$ et $u_2 = (0,1,0,1)$ engendre $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-z-t = 0 \text{ et } x-y-z+t = 0\}$.

Proposition 20.3.6
Soit F *un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^n$. *Alors*

20.3.3 Bases

Définition 20.3.7
Soit F *un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^n$, *et soit* $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_p\}$ *une famille de vecteurs de* F.

On dit que $\mathcal{B}$ *est une* base *de* F *si*

Proposition – Définition 20.3.8
Une famille $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_p)$ *est une base de* F *si et seulement si*

Dans ce cas, si

$$u = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k,$$

alors les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont appelés

EXEMPLE

La famille est une base de $\mathbb{R}^2$.

EXEMPLE

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$. Montrons que $\{u, v\}$ est une base de F avec $u = (-2, 0, 1)$ et $v = (1, 0, 1)$.

-
-

Finalement, $\{u, v\}$ est bien une base.

Définition 20.3.9
Soient $u_1, \ldots, u_n$ les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ définis par

$$u_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),\ u_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ u_n = (0, 0, \ldots, 0, 1).$$

Alors la famille $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_m\}$ est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée

Théorème 20.3.10
Pour tout sous-espace vectoriel F de $\mathbb{K}^n$,

En particulier, toute base de $\mathbb{K}^n$ est composée de

20.3.4 Représentation matricielle

La matrice associée à un vecteur $u \in \mathbb{K}^n$ est la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont les coordonées de u.

La matrice associée à une famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{F}$.

EXEMPLE

Soient $u = (1,2,3)$ et $v = (4,5,6)$. Alors la matrice associée à la famille (u, v) est

Définition 20.3.11
On appelle rang *d'une famille de vecteurs*

Proposition 20.3.12
Une famille de p vecteurs est libre si et seulement si

EXEMPLE

La matrice de l'exemple précédent est de rang 2, et la famille est donc libre.

Corollaire 20.3.13
Une famille de n vecteurs est une base de $\mathbb{K}^n$ si et seulement si

20.4 Espaces de dimensions finies

Proposition – Définition 20.4.1
Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Toutes les bases de F ont le même nombre de vecteurs, appelé

Par convention, la dimension de $\{0\}$ est nulle.

EXEMPLE

On a donc $\dim \mathbb{K}^n = n$.

Définition 20.4.2
Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ est appelé :

-

-
-

Proposition 20.4.3
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$. Alors

- *Si $F \subseteq G$, alors*
- *Si $F \subseteq G$ et $\dim F = \dim G$, alors*

MÉTHODE :

> Pour montrer une égalité entre sous-espaces vectoriels, il suffit de montrer

Voyons maintenant comment construire des bases à partir de familles libres ou génératrices.

Théorème 20.4.4 : de la base extraite
Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

De toute famille génératrice de F, on peut extraire une base de F.

Démonstration. Appelons $(u_1, \ldots, u_p)$ cette famille. Si elle est libre,

Sinon,

Par récurrence, on crée ainsi une suite (finie) de familles génératrices de F. On arrivera nécessairement à une famille libre,

□

Théorème 20.4.5 : de la base incomplète
Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Toute famille libre de vecteurs de F peut être complétée en une base.

On peut alors énoncer :

Proposition 20.4.6
Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ de dimension p. Alors

-

-
-
-

20.5 Exercices

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$:

a) $\{(x,y) \mid 2x - y = 0\}$
b) $\{(x,y) \mid x \leqslant y\}$
c) $\{(x,y) \mid x = y\}$
d) $\{(x,y) \mid xy = 0\}$
e) $\{(x,y) \mid xy = 1\}$
f) $\{(x,y) \mid x + y = 1\}$

Exercice 2. Donner une écriture cartésienne de

a) $\mathrm{Vect}((1,2,2),(2,1,3))$
b) $\mathrm{Vect}((1,4,1,1),(-1,2,2,1))$
c) $\{(2a-3b+c, a+2b-c, -b+c, a) \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$

Exercice 3. Donner une écriture paramétrique de

a) $\{(x,y,z,t) \mid x - y - 2t = 0 \text{ et } x + t = 0\}$
b) $\{(x,y,z,t) \mid x - z + t = 0 \text{ et } y + z = 0\}$
c) $\{(x,y,z,t) \mid x - y + z \text{ et } y - 2t = 0\}$

Exercice 4. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$. On dit que F et G sont supplémentaires si tout élément de $\mathbb{K}^n$ s'écrit de façon unique comme $f+g$, où $f \in F$ et $g \in G$.

Montrer que F et G sont supplémentaires si et seulement si $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$.

Exercice 5. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace de $\mathbb{K}^n$ si et seulement si $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.

Exercice 6. Les familles suivantes sont-elles libres ou liées :

a) $u = (1,-1,0), v = (2,1,-1), w = (1,5,1)$
b) $u = (1,1,2), v = (2,1,0), w = (3,1,\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$.
c) $u = (1,0,-2), v = (2,3,1), w = (4,-2,1)$
d) $u = (1,1,-1), v = (1,-1,1), w = (-1,1,1), t = (1,1,1)$
e) $u = (1,1,0,0), v = (1,m,1,0), w = (1,0,m,1), t = (1,0,0,m), m \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille libre de $\mathbb{K}^p$. On pour pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ $w_k = v_k + v_{k+1}$ et $w_n = v_n + v_1$.

Étudier la liberté de $(w_1, \ldots, w_n)$.

Exercice 8. Les familles suivantes sont-elles des libres ? génératrices ? des bases ?

Dans les cas de familles libres, on les complétera en une bases ; dans le cas de famille génératrice, extraire une base.

a) $((2,4,3),(1,5,7))$

b) $((1,2,3),(2,3,4),(3,4,5),(4,5,6))$

c) $((9,3,-7),(1,8,8),(5,-5,1))$

d) $((0,1,2),(1,2,0),(2,0,1))$

Exercice 9. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels, et en donner une base et leur dimension

a) $\{(x,y,z) \mid x-y+3z=0 \text{ et } 2x-y+z0\}$

b) $\{(x,y,z) \mid x-y+4z=0\}$

c) $\{(x+2y-2z,-x+3y-z,x+7y-5z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$

d) $\{(x,y,z,t) \mid 2x+y+z-t=0 \text{ et } x-y+z+t=0 \text{ et } x+@y-at=0\}$ où $a \in \mathbb{R}$.

e) $\mathrm{Vect}((1,1,-2),(2,1,-3),(0,1,-1))$

f) $\mathrm{Vect}((4,-5,3),(2,3,-2),(4,-16,10),(8,1,-1))$