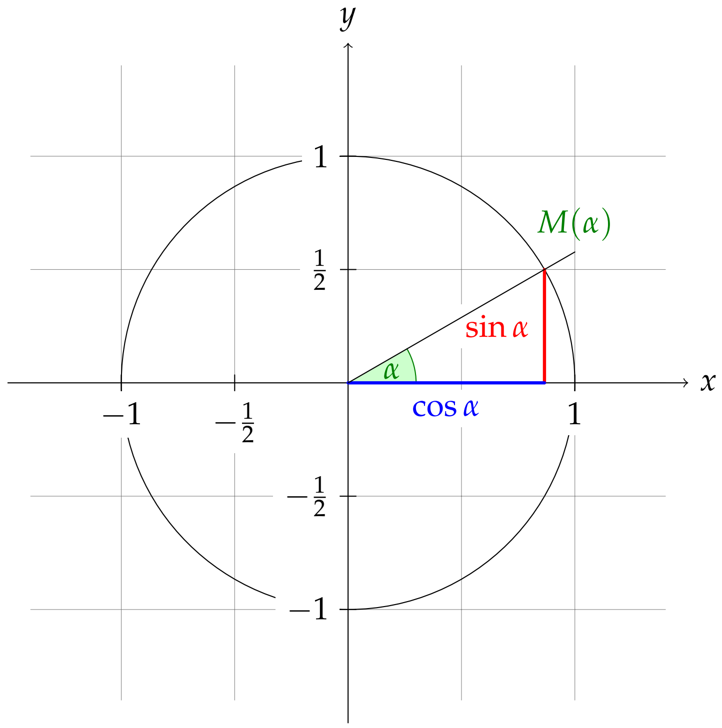
Chapitre 3

Trigonométrie

3.1 Définition et propriétés des fonctions circulaires

On va, dans cette section, rappeler les propriétés des trois fonctions trigonométriques : *cosinus, sinus et tangente.*

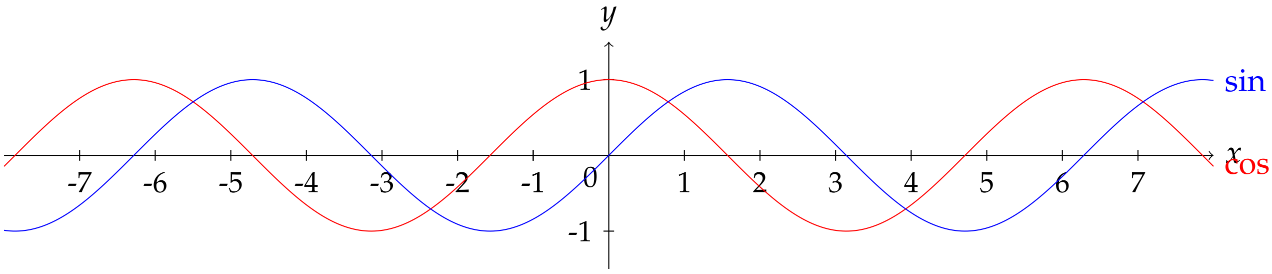
Définition 3.1.1
À tout réel α, on associe le point $M(\alpha)$ d'abscisse curviligne α.

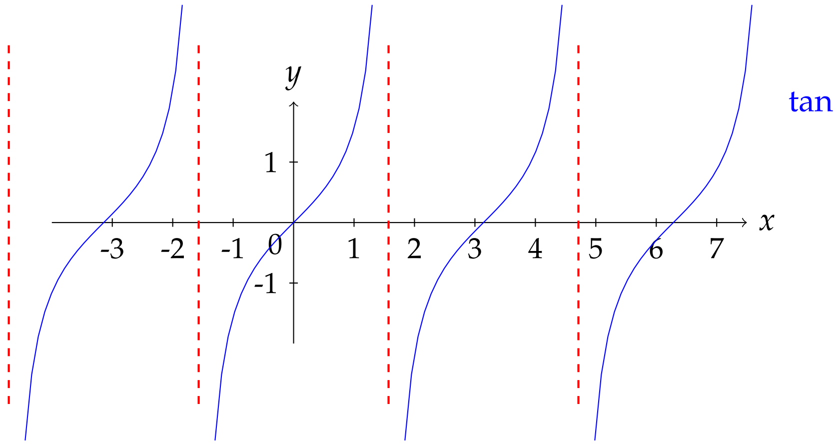


On appelle alors cosinus de α
, et sinus de α

On définit aussi la tangente de α *comme le rapport*

Voici les courbes de ces fonctions :





Il faut connaître quelques valeurs remarquables des fonctions trigonométriques :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$					
$\cos(x)$					
$\tan(x)$					

Proposition 3.1.2
La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$, *, et elle est dérivable de dérivée* *.*

La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$, *, et elle est dérivable de dérivée* *.*

La fonction tan est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$*,*
, et elle est dérivable où elle est définie de dérivée .

Il faut connaître les formules de trigonométrie suivantes :

Proposition 3.1.3
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ *:*

- $\cos^2(x) + \sin^2(x) =$
- $\cos(\pi + x) =$
- $\sin(\pi + x) =$
- $\cos(\pi - x) =$
- $\sin(\pi - x) =$
- $\cos(\frac{\pi}{2} + x) =$
- $\sin(\frac{\pi}{2} + x) =$
- $\cos(\frac{\pi}{2} - x) =$
- $\cos(\frac{\pi}{2} - x) =$
- $\cos(x + y) =$
- $\sin(x + y) =$
- $\cos(2x) =$
- $\sin(2x) =$

Pour des x, y *qui conviennent***, on a de plus*

- $\tan(x + y) =$
- $\tan(x - y) =$
- $\tan(\frac{\pi}{2} + x) =$
- $\tan(\frac{\pi}{2} - x) =$

On peut aussi transformer des sommes en produits, et vice-versa :

Proposition 3.1.4
Soient $p, q \in \mathbb{R}$*. Alors*

- $\cos a \cos b =$
- $\sin a \sin b =$
- $\sin a \cos b =$
- $\cos a \sin b =$

et

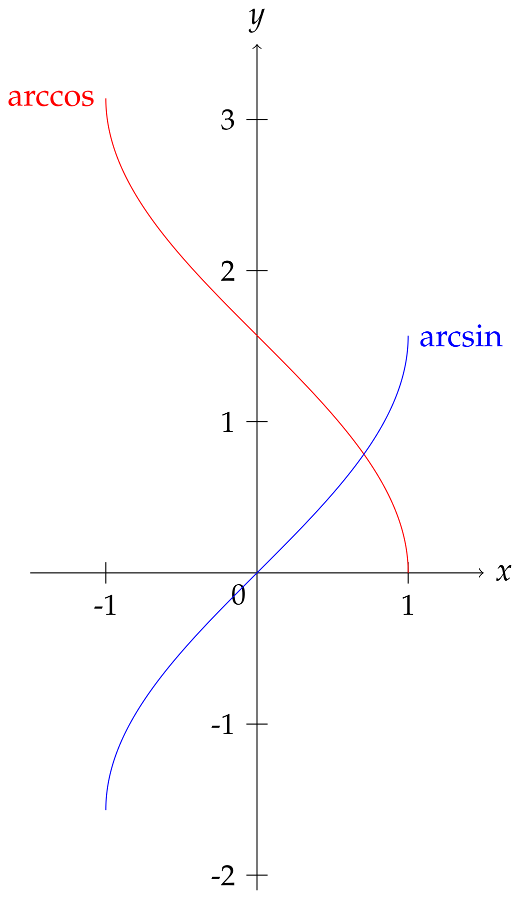
- $\cos p + \cos q =$
- $\cos p - \cos q =$
- $\sin p + \sin q =$
- $\sin p - \sin q =$

$*$. Exercice : expliciter

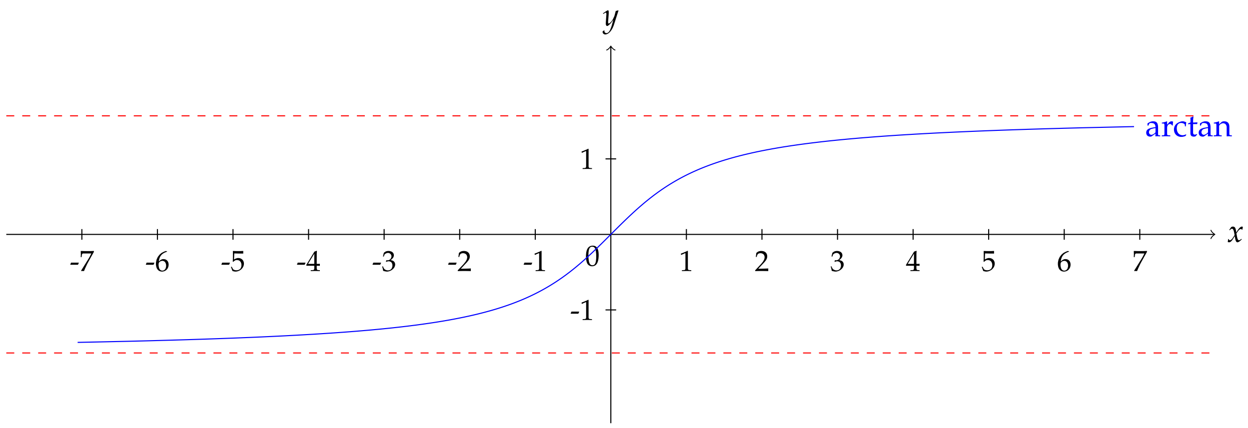
3.2 Fonction circulaires inverses

Proposition – Définition 3.2.1
Soit $a \in [-1,1]$. Alors l'équation $\cos(x) = a$ admet une unique solution dans l'intervalle . On note alors cette solution

Proposition – Définition 3.2.2
Soit $a \in [-1,1]$. Alors l'équation $\sin(x) = a$ admet une unique solution dans l'intervalle . On note alors cette solution



Proposition – Définition 3.2.3
Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors l'équation $\tan(x) = a$ admet une unique solution dans l'intervalle . On note alors cette solution



NOTA

Attention, les fonctions arccos, arcsin et arctan ne *sont pas* les réciproques des fonctions cos, sin et tan. On a bien

$$\cos(\arccos(x)) = \quad , \sin(\arcsin(x)) = \quad \text{et } \tan(\arctan(x)) = \quad ,$$

mais pas l'inverse ; par exemple, $\arcsin(\sin(2\pi)) = \quad$.

3.3 Résolution d'équations trigonométriques

Commençons par les cas simples :

Proposition 3.3.1
Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors l'équation $\cos(x) = a$ admet pour solution :

-

-

Proposition 3.3.2
Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors l'équation $\sin(x) = a$ admet pour solution :

-

•

Proposition 3.3.3
Soit $a \in \mathbb{R}$. *Alors l'équation* $\tan(x) = a$ *admet pour solution*

On va maintenant énoncer un résultat qui nous permettra de résoudre des équations plus compliquées :

Proposition 3.3.4
Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. *Alors*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ a\cos(x) + b\sin(x) =$$

Démonstration. Commençons par le cas plus simple où $a = 1$. On pose alors $\varphi =$; on a alors $b =$.

On a donc

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) + b\sin(x) =$

On a donc le résultat voulu.

Pour le cas où $a \neq 1$, il suffit de commencer par factoriser par a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ a\cos(x) + b\sin(x) =$$

puis de continuer comme dans le cas précédent en posant

$$\varphi = \qquad \text{et } r =$$

□

NOTA

En pratique, on peut souvent trouver directement la valeur de φ : on factorise par , et on reconnaît des valeurs connues.

EXEMPLE

Mettons $3\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x)$ sous la forme voulue. On a alors

$3\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) =$

$=$

$=$

$=$

On peut maintenant résoudre des équations du type

$$a\cos(x) + b\sin(x) = c.$$

MÉTHODE :

- On commence par mettre le terme de droite sous la forme
- On utilise le résultat pour les équations de cosinus pour résoudre

EXEMPLE

Résolvons l'équation

$$3\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{6}.$$

C'est équivalent à l'équation

ou encore

On a donc $x - \frac{\pi}{6} \in$, *i.e.* l'ensemble des solutions est

Dans tous les autres cas d'équations, il faut utiliser les formules de trigonométrie pour se ramener à un cas connu.

EXEMPLE

Résolvons l'équation

$$\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0.$$

On développe

$\sin(2x) =$
$\sin(3x) =$
$=$
$=$

L'équation est donc équivalente à

ou encore

Donc $\sin(x) = 0$, *i.e.* , ou $\cos(x) = 0$, *i.e.* , ou $\cos(x) = -\frac{1}{2}$, *i.e.*

3.4 Exercices

Exercice 1. Donner les ensembles de définition et simplifier :

(i) $\cos(2\arccos(x))$
(ii) $\cos(2\arcsin(x))$
(iii) $\sin(2\arccos(x))$

Exercice 2. Tracer le graphe de la fonction

$$x \mapsto \arccos(\cos x) + \arcsin(\sin x).$$

Exercice 3. On définit la suite de Fibonacci (f_n) par

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

(i) Montrer que pour tout n

$$f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2} = (-1)^n.$$

(ii) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned}\arctan(1/f_{2n}) &= \arctan(1/f_{2n+1}) \\ &\quad + \arctan(1/f_{2n+2}).\end{aligned}$$

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes

(i) $\sin(x) - \cos(x) = \frac{\sqrt{6}}{2}$
(ii) $\sin(x) + \sqrt{3}\cos(x) = \sqrt{2}$
(iii) $\sin(x) + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos(x) = 0$
(iv) $\cos(2x) + \sqrt{3}\cos(2x) = \sqrt{2}$

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On veut résoudre l'équation

$$\cos^n(x) + \sin^n(x) = 1 \qquad (E_n)$$

(i) Résoudre les équations (E_0) et (E_2).
(ii) Résoudre l'équation (E_1).
(iii) Résoudre l'équation (E_n) pour $n > 2$.

Exercice 6. Soit $x \neq 0 \pmod{2\pi}$. Montrer

$$\sin(x) + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx) = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

en procédant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7. Résoudre l'équation

$$\tan x \tan 2x = 1$$

Exercice 8. Simplifier

$$\frac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q}$$

En déduire la valeur de

$$\tan \frac{\pi}{24}$$