Chapitre 7

Outils pour la Physique

7.1 Fonctions de plusieurs variables

Dans la plupart des problèmes physiques, le résultat n'est pas fonction d'une seule variable, mais de plusieurs ; par exemple, on peut exprimer une énergie cinétique en fonction d'une masse et d'une vitesse :

$$E(m,v) = \frac{1}{2}mv^2.$$

Les fonctions de plusieurs variables ne se comportent pas nécessairement comme des fonctions d'une seule variable, et nous allons donc présenter dans cette partie plusieurs résultats qui pourront être utiles.

Définition 7.1.1
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, et

$$f : \begin{array}{ccc} I \times J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

une fonction de deux variables.

On dit que f est dérivable par rapport à la première variable si en fixant $y \in J$, la fonction $f_1 : x \in I \mapsto f(x,y)$ est dérivable. Dans ce cas on note $\partial_1 f$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ la dérivée de f_1.

De même, on dit que f est dérivable par rapport à la deuxième variable si en fixant $x \in I$, la fonction $f_2 : y \in J \mapsto f(x,y)$ est dérivable. Dans ce cas, on note $\partial_2 f$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ la dérivée de f_2.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *s'appellent respectivement* dérivée partielle de f par rapport à la première variable *et* dérivée partielle de f par rapport à la seconde variable.

NOTA

Si f est une fonction de trois (ou plus) variables, les définitions sont les mêmes : on calcule une dérivée partielle en fixant toutes les variables sauf une, et en dérivant.

EXEMPLE

Soit $f : (x,y) \mapsto x^2 - y^3 + \cos(x)\sin(y)$. Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - \sin(x)\sin(y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -3y^2 + \cos(x)\cos(y).$$

Les dérivées partielles étant des fonctions de plusieurs variables, on peut à nouveau en calculer des dérivées partielles. On utilisera alors le théorème de Schwarz :

Théorème 7.1.2
Soit f une fonction de deux variables, de classe $\mathcal{C}^2$. Alors pour tout (x,y),

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right](x,y) = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right](x,y).$$

On notera alors cette dérivée partielle seconde commune $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. On notera aussi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ pour les dérivées secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}$.

On pourra alors généraliser pour des fonctions ayant plus de deux variables, ou des dérivées successives.

On appellera alors *équation aux dérivées partielles* * toute équation – où l'inconnue est la fonction – liant f et ses dérivées partielles.

EXEMPLE

On a par exemple l'équation de la chaleur, qui donne la température dans une barre. Si $u(x,t)$ est la température au point x à l'instant t, alors

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Il est souvent difficile, voire impossible, de donner des solutions explicites aux équations aux dérivées partielles.

7.2 Intégrales

Définition 7.2.1
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On appelle primitive de f *toute fonction g dérivable sur I telle que $g' = f$.*

*. ou EDP

Il n'y a pas de méthode générale pour trouver des primitives, il faut donc être capable de lire le tableau de dérivées à l'envers.

EXEMPLE

La fonction $x \mapsto 3x^2$ est une primitive de $x \mapsto x^3$, et la fonction $x \mapsto \ln(|x|)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Proposition 7.2.2
Soit f une fonction, et soit g une primitive de f. Alors l'ensemble des primitives de f est exactement $\{g + \lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Le lien avec les intégrales est alors donné par le théorème suivant :

Théorème 7.2.3 : fondamental de l'analyse
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors pour tout $a \in I$, la fonction

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \end{array}$$

est une primitive de f.

Corollaire 7.2.4
Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, et soit F une primitive de f. Alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

On confondra donc les calculs de primitives et les calculs d'intégrales, l'un pouvant être calculé directement grâce à l'autre.

Dans le cas où on ne touve pas immédiatement de primitive connue, on peut essayer l'une des deux méthodes suivantes :

Proposition 7.2.5 : Intégration par parties
Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Alors

$$\int_a^x u(t)v'(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^x - \int_a^x u'(t)v(t)\mathrm{d}t.$$

EXEMPLE À CONNAÎTRE

Cherchons une primitive de ln. On cherche donc à calculer pour tout x

$$\int_1^x \ln(t)\mathrm{d}t.$$

Posons $u : t \mapsto \ln(t)$ et $v : t \mapsto t$. u et v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$, et on a donc

$$\begin{aligned}\int_1^x \ln(t)\mathrm{d}t &= \int_1^x u(t)v'(t)\mathrm{d}t \\ &= [u(t)v(t)]_1^x - \int_1^x u'(t)v(t)\mathrm{d}t \\ &= [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x 1\mathrm{d}t \\ &= x\ln(x) - x + 1\end{aligned}$$

Une primitive de ln est donc $x \mapsto x\ln(x) - x$.

Proposition 7.2.6 : Changement de variable
Soient f une fonction continue, et φ de classe $\mathcal{C}^1$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi([a,b]) \subseteq \mathcal{D}_f$. Alors

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x.$$

NOTA

Dans la pratique, on fait comme pour les changement d'indices dans les sommes : on pose $x = \varphi(t)$, et donc $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$.

EXEMPLE

Calculons $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\mathrm{d}x$. Posons alors $t = x + 1$, soit $x = t - 1$. Alors $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1$, et donc $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$. On a donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\mathrm{d}x &= \int_1^2 \frac{(t-1)^2}{t}\mathrm{d}t \\ &= \int_1^2 \left(t - 2 + \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^2}{2} - 2t + \ln(t)\right]_1^2 \\ &= \ln(2) - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

7.3 Équations différentielles

On appelle équation différentielle toute équation fonctionnelle (*i.e.* où l'inconnue est une fonction) liant une fonction et ses dérivées.

EXEMPLE

L'équation $y' - y = \exp$ est une équation différentielle.

7.3.1 Équations d'ordre 1

Définition 7.3.1
On dit qu'une équation est d'ordre 1 si elle est de la forme

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x),$$

où a, b, c sont des fonctions.

La fonction c est appelée second membre *. Si $c = 0$, on dit que l'équation est* homogène*.*

On dit qu'elle est à coefficients constantes si a, b sont des fonctions constantes.

Avant de résoudre une équation, on la met sous forme résoluble :

$$y' + ay = b,$$

en divisant par le coefficient de y' (attention à se placer sur un intervalle où il ne s'annule pas).

Proposition 7.3.2
Les solutions de $y' + ay = 0$ sont exactement les

$$y : t \mapsto ke^{-A(t)} \text{ où } A \text{ est une primitive de } a \text{ et } k \in \mathbb{R}$$

Proposition 7.3.3 : Principe de superposition
Les solutions de l'équation $y' + ay = b$ sont données par

$$y : t \mapsto y_h(t) + y_p(t),$$

où y_h est une solution de l'équation homogène $y' + ay = 0$, et y_p n'importe quelle solution de $y' + ay = b$.

La principale difficulté d'une équation différentielle est donc de trouver une solution particulière ; toutes les autres s'en déduisent après résolution de l'équation homogène.

Une méthode, appelée méthode de variation de la constante, est de chercher cette solution sous la forme $c = by_h$, où y_h est une solution de l'équation homogène qui ne s'annule pas.

On calcule alors b', puis on en prend une primitive pour trouver b, puis c.

EXEMPLE

Considérons l'équation $(E) \quad y' + xy = x$.

- Commençons par résoudre l'équation homogène $(E_h) \quad y' + xy = 0$.
  On cherche donc une primitive de x, soit $\frac{1}{2}x^2$, et toutes les solutions sont de la forme
  $$y_h : x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$
- On cherche maintenant une solution particulière : on la cherche sous la forme $c(x) = b(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}$. On a alors
  $$b'(x) = (c(x) + xc'(x))e^{\frac{1}{2}x^2} = xe^{\frac{1}{2}x^2}.$$
  Une primitive de b' est donc $e^{\frac{1}{2}x^2}$, et on a donc notre solution particulière :
  $$y_p(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}e^{\frac{1}{2}x^2} = 1.$$

Il ne reste plus qu'à conclure : toutes les solutions de (E) sont de la forme
$$x \mapsto ke^{-\frac{1}{2}x^2} + 1.$$

Proposition 7.3.4 : Problème de Cauchy †
Soient x_0 et y_0 deux réels. Alors il existe une unique solution à l'équation $y' + ay = b$ vérifiant $y(x_0) = y_0$.

EXEMPLE

Reprenons l'équation précédente, et cherchons la solution vérifiant $y(0) = 0$. On a alors
$$k + 1 = 0, \text{ et donc } k = -1.$$
L'unique solution du problème de Cauchy est donc
$$x \mapsto 1 - e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

7.3.2 Équations d'ordre 2

Définition 7.3.5
On appelle équation d'ordre 2 toute équation de la forme
$$ay'' + by' + cy = d.$$

†. Augustin Louis Cauchy, 1789 – 1857, Français

Là encore, d s'appelle second membre, et on dit que l'équation est homogène si $d = 0$.

Comme pour le premier ordre, on commence par mettre sous forme résoluble l'équation :

$$y'' + ay' + b = c.$$

On ne parlera dans la suite que d'équation du second ordre à coefficients a et b constants.

Proposition 7.3.6
Les solutions de l'équation homogène (E_h) $\quad y'' + ay' + by = 0$ sont données suivant les solutions de l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$. Soit $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant :

- *Si $\Delta > 0$, alors l'équation caractéristique admet deux solutions réelles r_1 et r_2, et les solutions de (E_h) sont données par*

$$x \mapsto k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

- *Si $\Delta = 0$, alors l'équation caractéristique admet une unique solution réelle r, et les solutions de (E_h) sont données par*

$$x \mapsto (k_1 x + k_2) e^{rx}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

- *Si $\Delta < 0$, alors l'équation caracéristique admet deux solutions complexes conjuguées $\lambda \pm i\omega$, et les solutions de (E_h) sont données par*

$$x \mapsto e^{\lambda x}(k_1 \cos(\omega x) + k_2 \sin(\omega x)), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Proposition 7.3.7 : Principe de superposition
Toute solution de $y'' + ay' + by = c$ est de la forme $y_h + y_p$, où y_h est une solution de l'équation homogène associée, et y_p une solution particulière.

Dans le cas coefficients constants, on cherche souvent une solution particulière "ressemblant" au second membre, éventuellement multiplié par un polynôme de degré inférieur à 2.

EXEMPLE

Résolvons l'équation $y'' - y' - 2y = e^{2x}$.

- On commence par calculer l'équation caractéristique : $r^2 - r - 2 = 0$. Le discriminant vaut 9 , et les racines sont -1 et 2 . Les solutions de l'équation homogène sont donc sous la forme

$$y_h : x \mapsto k_1 e^{2x} + k_2 e^{-x}.$$

- Cherchons une solution particulière sous la forme $c(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^{2x}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

  On a alors $c'(x) = (2\alpha x^2 + 2(\alpha+\beta)x + \beta + 2\gamma)e^{2x}$ et $c''(x) = (4\alpha x^2 4(2\alpha+\beta)x + 2\alpha + 4\beta +$
  Finalement,
  $$c'' - c' - 2c = (0x^2 + 6\alpha x + 2\alpha + 3\beta)e^{2x}.$$
  On identifie alors les coefficients : $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{1}{3}$.

  Une solution particulière est donc donnée par
  $$y_p : x \mapsto \frac{1}{3}xe^{2x}.$$

Finalement, les solutions de l'équation sont données par
$$x \mapsto \left(\frac{1}{3}x + k_1\right)e^{2x} + k_2e^{-x}.$$

On note que dans le cas d'un second membre constant, la solution particulière est à chercher parmi les fonctions constantes.

Proposition 7.3.8 : Problème de Cauchy
Étant donnée une équation du second ordre, il existe une unique solution vérifiant $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$.

7.4 Exercices

Exercice 1. Calculer les dérivées partielles suivantes :

- $(x,y) \mapsto xye^{-x^2+2y}$
- $(x,y,z) \mapsto xye^z + xze^y + yze^x$
- $(x,y) \mapsto \sin^2(x)\cos^3(y)$
- $(x,y) \mapsto \ln\left(\sqrt{x^2+y^2-4}\right)$
- $(x,y) \mapsto \tan(x-y)$
- $(x,y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$
- $(x_1,\ldots,x_n) \mapsto (x_1^2+\cdots+x_n^2)e^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)}$

Exercice 2. Calculer les primitives des fonctions suivantes :

- $x \mapsto x\sqrt{x}$
- $x \mapsto \dfrac{\sin x \cos x}{\cos^2(x)+2}$
- $x \mapsto \dfrac{(\ln x)^3}{x}$
- $x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)(x+3)}$
- $x \mapsto xe^x$
- $x \mapsto \dfrac{e^{2x}+1}{\left(e^{2x}+2x+1\right)^2}$

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes :

- $\displaystyle\int_0^2 \left(x^4+5x^3-2x+1\right)\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x-2)}$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\tan^3(x)+\tan^5(x)\right)\mathrm{d}x$

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes :

- $\displaystyle\int_0^{\pi} t\cos(t)\mathrm{d}t$
- $\displaystyle\int_0^{\pi} e^t\sin(t)\mathrm{d}t$
- $\displaystyle\int_2^x \frac{t-t\ln(t)-1}{t(\ln(t))^2}\mathrm{d}t$

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes avec le changement de variables proposé :

- $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}\mathrm{d}x$ en posant $t=\frac{x}{2}$.
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\mathrm{d}x$ en posant $t=e^x$
- $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right) arctan(x)\mathrm{d}x$ en posant $u=\frac{1}{x}$.
  On pourra utiliser la formule $\arctan(1/x)=\frac{\pi}{2}-\arctan x$.

Exercice 6. Résoudre les équations différentielles suivantes :

- $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$
- $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$
- $2xy' + y = x^n$
- $(x+1)y' - xy + 1 = 0$

Exercice 7. (i) Si on place en série un condensateur de capacité C et une résistance R, alimentés par une générateur de force V, alors la charge q du condenstateur vérifie

$$\dot{q} + \frac{1}{RC}q = \frac{V}{R}.$$

Si le condensateur n'est pas chargé au temps 0, calculer l'expression de q.

(ii) Si on place en série un condensateur de capacité C et une bobine d'inductance L, alimentés par une générateur de force V, alors la charge q du condenstateur vérifie

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{V}{L}.$$

Si le condensateur n'est pas chargé au temps 0, calculer l'expression de q.

Exercice 8. Trouver toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x,\ f'(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Indication : on pourra montrer que f est deux fois dérivable.

Exercice 9. Résoudre les équations différentielles suivantes :

- $y'' + 8y' + 15y = 5$
- $y'' - 2y' = 2$
- $y'' + 3y' + 2y = e^x$
- $y'' + y = \sin(x)$