- Établir la formule du degré d'une somme de polynômes.

- Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $a \in \mathbb{C}$. Montrer que a est racine de P si et seulement si $P(a) = 0$.

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $z \in \mathbb{C}$ est racine de P si et seulement si $\overline{z}$ est racine de P.

- Établir les relations coefficients-racines pour les polynômes de degré trois.

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$
  1. Montrer que si $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$, alors toute racine réelle de P est de multiplicité paire.
  2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$ si et seulement s'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

- Quels sont les polynômes complexes dont l'image est incluse dans $\mathbb{R}$?

- On cherche les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que
$$P = P(1 - X).$$
  1. Montrer que $X^2 - X + \lambda$ est solution du problème pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.
  2. Montrer que si P et Q sont solutions, alors PQ aussi.
  3. Soit P solution du problème, unitaire. Montrer que P peut s'écrire
  $$P = \left(X - \frac{1}{2}\right)^k \prod_{i=1}^{p} (X^2 - X + \lambda_i),$$
  avec $k, p \in \mathbb{N}$ et pour tout i, $\lambda_i \in \mathbb{C}$.
  4. Montrer que k est pair.
  5. Conclure.

- Soit $P \neq X$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que
$$P \circ P - X = (P - X)Q.$$

- Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que
$$(X + 1)^n - X^n - 1 = (X^2 + X + 1)Q.$$

- Soit $P = X^3 + X + 1$. On note α, β et γ ses racines complexes.
  1. Calculer $\alpha + \beta + \gamma$ et $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.
  2. Calculer $P(\alpha)+P(\beta)+P(\gamma)$ de deux façons différentes pour calculer $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$.
  3. En notant que $X^4 = X \times (X^3 + X + 1) - X^2 - X$, calculer $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4$.

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3 ayant trois racines réelles $\alpha,\ \beta,\ \gamma$.
  1. Montrer que $\frac{\alpha+\beta}{2}$ n'est pas racine de P'.
  2. Montrer que la tangente à la courbe de P au point d'abcisse $\frac{\alpha+\beta}{2}$ coupe l'axe des abcisses en γ.

- Résoudre le système
$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ xyz = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

- Soit $P = X^3 - aX^2 + bX - c$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que ses racines complexes soient en progression arithmétique (*i.e* les trois premiers termes d'une suite arithmétique).