- Établir la formule du degré d'une somme de polynômes.

- Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $a \in \mathbb{C}$. Montrer que a est racine de P si et seulement si $P(a) = 0$.

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $z \in \mathbb{C}$ est racine de P si et seulement si $\overline{z}$ est racine de P.

- Établir les relations coefficients-racines pour les polynômes de degré trois.

- Énoncer et montrer la formule des probabilités totales.

- Énoncer et démontrer la formule des probabilités composées.

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$
  1. Montrer que si $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$, alors toute racine réelle de P est de multiplicité paire.
  2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$ si et seulement s'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

- On cherche les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que
$$P = P(1 - X).$$
  1. Montrer que $X^2 - X + \lambda$ est solution du problème pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.
  2. Montrer que si P et Q sont solutions, alors PQ aussi.
  3. Soit P solution du problème, unitaire. Montrer que P peut s'écrire
$$P = \left(X - \frac{1}{2}\right)^k \prod_{i=1}^{p} (X^2 - X + \lambda_i),$$
avec $k, p \in \mathbb{N}$ et pour tout i, $\lambda_i \in \mathbb{C}$.
  4. Montrer que k est pair.
  5. Conclure.

- Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que
$$L_i(a_i) = 1 \text{ et } L_i(a_j) = 0\ \forall j \neq i.$$

- Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On pose $N = b + r$. On tire au hasard et successivement une boule de l'urne : si la boule est rouge, on la remplace par une boule blanche dans l'urne, sinon on ne la remplace pas.
Soit R_i l'événement "on tire une boule rouge au i-ième tirage" et A_i "on tire pour la première fois une boule blanche au i-ième tirage".
  1. Exprimer A_i à l'aide des R_k. Calculer $P(A_k)$.
  2. Soit C_m l'événement "quand on tire pour la première fios une boule blanche, il reste m boules rouges dans l'urne".
     (a) Calculer $P(C_0)$ puis montrer que pour tuot $m \in \mathbb{N}^*$
$$P(C_m) = \frac{r!}{N^r} \left(\frac{N^m}{m!} - \frac{N^{m-1}}{(m-1)!} \right).$$
     (b) Vérifier que $\sum_{m=0}^{r} P(C_m) = 1$. Que peut-on dire de l'union des C_m ?

- Un fumer décide de ne plus fumer. On admet que s'il ne fume pas un jour donnée, la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est 0.3. En revnahce, s'il succombe ce jour-là, la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est 0.9.
Quelle est la probabilité qu'il ne fume pas le n-iène jour ? Que se passe-t-il quand n est grand ?

- Une urne A contient une boule rouge et deux boules noires. Une urne B contient trois rouges et une noire. Au départ, on choisit une urne, la probabilité de choisir A étant $p \in]0, 1[$. Puis on choisit une boule dans cette urne. Si, à un tirage quelconque, on a tiré une boule rouge, le tirage suivant se fait dans A, sinon dans B. Les tirages se font avec remise. On note p_n la probabilité de choisir une boule rouge au tirage numéro n.
Calculer p_1, puis calculer p_{n+1} en fonction de p_n. En déduire p_n en fonction de n, puis la limite de (p_n).