- Donner un équivalent de $\frac{x\ln(1+\sqrt{x})}{e^x-1}$ au voisinage de $x=0$.

- Donner un équivalent de $e^{\tan(x)}-e^{\sin(x)}$ au voisinage de $x=0$.

- Donner un équivalent de $e^{2\cos(x)}-e^2$ au voisinage de $x=0$.

- Étudier la limite de $x\mapsto e^x\sin(x)$ en $\pm\infty$.

- Soient f et g deux fonctions définies et continues sur $[-1,1]$. On pose pour tous $u\in\mathbb{R}$ et $x\in[-1,1]$

$$h_u(x)=f(x)+ug(x).$$

  1. Montrer que h_u est bornée sur $[-1,1]$ et atteint ses bornes.
     On note $M:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ u&\longmapsto&\min h_u\end{array}$.
  2. Soient $u,v\in\mathbb{R}$ et $x,y\in[-1,1]$ tels que $M(u)=h_u(x)$ et $M(v)=h_v(y)$. Montrer que $(v-u)g(x)\leqslant M(v)-M(u)\leqslant(v-u)g(y)$.
  3. Montrer que M est continue sur $\mathbb{R}$.

- 1. Montrer que pour tout $x\neq 0$,

$$\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \text{si } x>0\\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x<0\end{cases}.$$

  2. Montrer que

$$\arctan\left(\frac{1}{3}\right)+\arctan\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

- Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=f(2x)$. Montrer que f est constante.

- Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=f(x+3)f(x-3).$$

  Montrer que f est périodique.

- Soit $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ x&\longmapsto&\begin{cases}x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si non}\end{cases}\end{array}$.
  1. Tracer le graphe de f.
  2. Montrer que f est continue en 0, mais pas en 1.

- Montrer que si f et g sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, qui ne s'annulent pas et telles que $\forall x\in\mathbb{R},\ |f(x)|=|g(x)|$, alors $f=g$ ou $f=-g$.

- Soit $f:I\to\mathbb{R}$ continue.
  1. Soient $a,b\in I$. Montrer qu'il existe $c\in I$ tel que
$$f(x)=\frac{1}{2}(f(a)+f(b)).$$
  2. Soient $p,q>0$. Montrer qu'il existe $c\in I$ tel que $pf(a)+qf(b)=(p+q)f(x)$.
  3. Soient $a_1,\dots,a_n\in I$ et $t_1,\dots,t_n>0$. Montrer qu'il existe $c\in I$ tel que
$$\sum_{k=1}^n t_kf(a_k)=f(x)\sum_{k=1}^n t_k.$$

- Soient $a\in\mathbb{R}$ et

$$f_a:\begin{array}{ccc}]-3,3[&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ x&\longmapsto&(x^2-ax+1)\tan\left(\frac{\pi x}{6}\right)\end{array}.$$

  1. Donner un équivalent de f_a en $x=3$.
  2. Étudier la prolongeabilité par continuité en $x=3$.
  3. Plus généralement, si $P\in\mathbb{R}[X]$, à quelle condition sur P la fonction $x\mapsto P(x)\tan\left(\frac{\pi x}{6}\right)$ est-elle prolongeable par continuité en $x=3$?

- Résoudre l'équation $x^y=y^x$ pour $x,y\in\mathbb{N}^*$.