- Soit f admettant une limite réelle ℓ en $a \in \mathbb{R}$. Montrer que cette limite est unique.

- Énoncer et démontrer le théorème de développement limité d'ordre 1.

- Énoncer et démontrer le théorème de dérivation d'une fonction réciproque.

- Énoncer et démontrer le théorème de Rolle.

-
    1. Montrer que pour tout $x > 0$,
    $$\frac{1}{1+x} < \ln(1+x) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$
    2. Calculer pour tout $k > 2$
    $$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p}.$$

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on considère
$$f_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x+\lambda}{x^2+1} \end{array}.$$
    1. Montrer que les tangents en 0 des fonctions f_λ sont parallèles.
    2. Montrer que les tangentes en 1 sont concourantes.

- Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ telle qu'il eiste $k \in]0,1[$ tel que
$$\forall x, y,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|.$$
    1. Montrer que f est continue, et qu'elle admet un unique point fixe c dans $[0,1]$.
    2. Soit (c_n) définie par $c_0 \in [0,1]$ et $\forall n,\ c_{n+1} = f(c_n)$.
        (a) Montrer que la suite est bien définie.
        (b) Montrer que pour tout n
        $$|c_n - c| \leqslant k^n |c_) - c|.$$
        (c) En déduire la limite de (c_n).

- Soit f définie par
$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}.$$
    1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
    2. Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n. Étudier la limite de (u_n).

- Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$, qui s'annule pour une suite de point θ_n. On suppose que $\theta_n \to \theta$. Déterminer $f(\theta)$ et $f'(\theta)$.

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique dérivable. Soit $T \in \mathbb{R}$. Montrer que T est un période de f si et seulement si T est une période de f'.

- Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I. On appelle dérivée centrale de f en a la limite quand $h \to 0$ de
$$\frac{1}{2h}(f(a+h) - f(a-h)).$$
    1. Montrer que si f est dérivable à gauche et à droite en a, alors elle admet une dérivée centrale en a.
    2. La réciproque est-elle vraie ?

- Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable et strictement positive sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que
$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}.$$
Le résultat reste-il vrai si f n'est pas strictement positive, mais qu'elle ne s'annule pas ?

- On dit qu'un polynôme est *scindé à racines simples* si toutes ses racines sont réelles et de multiplicité 1.
    1. Montrer que si P est scindé à racines simples, alors P' aussi.
    2. Montrer que si P est scindé à racines simples, alors P ne peut pas avoir deux coefficients consécutifs nuls.