- Énoncer et démontrer le théorème de dérivation d'une fonction réciproque.

- Énoncer et démontrer le théorème de Rolle.

- Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov.

- Énoncer et démontrer la formule de Koenig-Huygens.

- Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-x^2} \end{array}$. Montrer que pour tout n, il existe un polynôme P_n de degré n ayant n racines distinctes tel que

$$f^{(n)} = P_n \times f.$$

- Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}} \end{array}$.
  1. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0, et que ce prolongement est dérivable en 0.
  2. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand, l'équation $g(t) = \frac{1}{n}$ admet deux solutions x_n et y_n, vérifiant $0 < x_n < 1 < y_n$.
  3. Étudier la monotonie et les limites de (x_n) et (y_n).

- Montrer que le polyôme $X^n + aX + b$ admet au plus trois racines réelles.

- Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} e^{\frac{1}{t}} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \end{array}$.
  1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
  2. Étudier la dérivabilité de f' en 0.
  3. Montrer que pour tout n, pour tout $t < 0$,

  $$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}}e^{\frac{1}{t}},$$

  où P_n est un polynôme.
  4. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

- Des vaches sont atteintes par une maladie avec probabilité $p = 0.15$. Pour dépister la maladie, deux méthodes sont possibles : faire une analyse sur le lait de chacune des vaches ; faire une analyse sur le mélange de tous les laits, et si le résultat est positif, tester le lait de chaque vache.

  Pour cette seconde méthode, on pose X_n la variable aléatoire du nombre d'analyse nécessaire, et $Y_n = \frac{X_n}{n}$.
  1. Déterminer la loi de Y_n, et donner son espérance.
  2. Étudier la fonction $f : x \mapsto \ln(0.85)x + \ln(x)$, et donner les entiers n tels que $f(n) > 0$.
  On donne $f(17) \simeq 0.07$ *et* $f(18) \simeq -0.03$.
  3. Quelle méthode permet de faire le moins d'analyses ?

- Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages sans remise dans cette urne jusqu'à ce que le numéro tiré ait un numéro supérieur au numéro tiré juste avant. On note X le nombre de tirages effectués.
  1. Quelle est l'image de X ?
  2. Déterminer la loi de X, puis son espérance.
  3. Quelle est la limite de $E(X)$ quand $n \to \infty$?

- Un joueur lance successivement n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N, chaque case étant équiprobable. On note T_n le nombre de cases non vides après n lancers.
  1. Quelle est l'image de T_n ?
  2. Donner les lois de T_1 et T_2.
  3. Déterminer les probabilités $P(T_n = i)$ pour $n \geqslant 2$ et $i = 1, 2$ ou n.
  4. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

  $$P(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}P(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N}P(T_n = k-1).$$

  5. On pose $G_n(x) = \sum_{k=1}^n P(T_n = k)x^k$.
     (a) Calculer $G_n(1)$.
     (b) Exprimer $E(T_n)$ en fonction de $G_n'(1)$.
     (c) Montrer que pour tout x

     $$G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}(x - x^2)G_n'(x) + xG_n(x).$$

     (d) En déduire que $E(T_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)E(T_n) + 1$, et en déduire la valeur de $E(T_n)$, ainsi que sa limite.