- Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov.

- Énoncer et démontrer la formule de Koenig-Huygens.

- Calculer l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.

- Une urne contient n boules, dont $m \in [\![1, n-1]\!]$ blanches. On fait des triages sans remise jusqu'à avoir tiré toutes les boules blanches. On note Y le nombre de tirages effectués.
  1. On note X_i le nombres de boules blanches après i tirages. Donner la loi de X_i.
  2. Exprimer, pour $k \in [\![2, n]\!]$, l'événement $[Y \leqslant k]$ en fonction de X_k. En déduire la loi de Y.
  3. Donner la loi de Y si $m = 1$, puis si $m = 2$.

- Deux joueurs jouent chacun n parties de pile ou face. Calculer la probabilité pour qu'ils aient le même nombre de pile.

  Calculer la probabilité pour qu'un joueur ait strictement plus de pile que l'autre.

- On lance m dés non truqués.
  1. Soit X_1 la variable aléatoire égale au nombre de dé amenant 6. Donner sans calcul la loi de X_1, son espérance et sa variance.
  2. On relance les dés qui n'ont pas donné 6. Soit X_2 le nombre de ceux qui donnent 6 lors de cette relance. Donner la loi de X_2 et son espérance.

- Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages avec remise. On arrête les tirages dès que le dernier numéro obtenu est supérieur ou égal au précédent. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
  1. Déterminer l'image de X.
  2. Déterminer les probabilités de $[X \geqslant 1]$, $[X \geqslant 3]$ et $[X = 2]$.
  3. Déterminer la probabilité de $[X \geqslant k]$ pour tout k.
  4. En déduire la loi de X, puis son espérance. Que se passe-t-il si $n \to \infty$?

- Loi de succession de Laplace.

  On considère $N+1$ urnes numérotées de 0 à N ; la k-ième contenant k boules rouges et $N-k$ blanches. On choisit une urne au hasard, et on effectue des tirages avec remise dans cette urne. On notera R_n l'événement "on a tiré une boule rouge au $n$ième tirage".
  1. Calculer les probabilités de R_1 et $R_1 \cap R_2$.
  2. On a tiré des boules rouges aux n premiers tirages. Quelle est la probabilité d'avoir à nouveau une boule rouge au $n+1$ième tirage ? Calculer la limite quand $N \to \infty$.

     On admettra que $\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^n = \frac{1}{n+1}$.

- À quelle condition sur la loi d'une variable X a-t-on $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X)^2$?

- Calculer $\mathbb{P}(X < \mathbb{E}(X))$ si X est une variable aléatoire de loi binomiale telle que $\mathbb{E}(X) \notin \mathbb{N}$ et $\mathbb{E}(X) = 2\mathbb{V}(X)$.

- Une secrétaire effectue n appels pour tenter de joindre n correspondants distincts. Chaque correspondant décroche avec probabilité p.
  1. Soit X le nombre de correspondants obtenus. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.
  2. On tente de joindre les $n - X$ correspondants non joints lors du premier appel. On appelle Y le nombre de correspondants joints à la deuxième tentative, et $Z = X + Y$. Donner l'image de Z.
  3. Calculer $\mathbb{P}(Z = 0)$ et $\mathbb{P}(Z = 1)$.
  4. Montrer que $\mathbb{P}(Z = \ell) = \sum\limits_{k=0}^{\ell} \mathbb{P}((X = k) \cap (Y = \ell - k))$.
  5. En calculant les valeurs de $\mathbb{P}_{[X=k]}(Y = \ell)$, donner la loi de Z. On reconnaitra une loi connue.