- Soient P et Q deux formules logiques. Montrer que
$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)).$$

- Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire.

- Démontrer que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

- Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que
$$\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a \leqslant b.$$
Montrer que A admet une borne supérieure, B une borne inférieure, et que $\sup A \leqslant \inf B$.

- Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On note
$$A + B = \{a + b \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$$
Montrer que
$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

- Montrer que la fonction partie entière est croissante sur $\mathbb{R}$, *i.e*
$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leqslant y \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor.$$

- Résoudre l'équation
$$\left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \frac{x-1}{2}.$$

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Montrer que f admet un point fixe, *i.e*
$$\exists x \in [0, 1],\ f(x) = x.$$

- Montrer la deuxième inégalité triangulaire
$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ ||a| - |b|| \leqslant |a - b|.$$

- Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$\min(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$
et
$$\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$
Donner une formule analogue pour $\max(x, y, z)$.

- Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. Montrer que
$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant 2\sqrt{a + b}.$$

- Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que si A admet un maximum m, alors $m = \sup A$. Montrer que la réciproque est fausse.

- Calculer la valeur de
$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}$$
et de
$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}$$