- Montrer qu'il existe $r, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) + b\sin(x) = r\cos(x - \varphi).$$

- Démontrer l'inégalité triangulaire complexe.

- Établir les solutions complexes de $e^z = 1$.

- Soit $t \in \mathbb{R}$. Donner le module de

$$z_1 = t^2 + 2it = 1 \text{ et } z_2 = 1 - \cos(t) + i\sin(t).$$

Mettre s_2 sous forme exponentielle.

- Soit $\alpha \in [0, 2\pi[$.
  (i) Résoudre l'équation

$$z^2 - 2^{\alpha+1}\cos(\alpha)z + 2^{2\alpha} = 0.$$

  (ii) On note u et v les solutions de l'équation. Pour quelles valeurs de α a-t-on $|u| = |v| = |u - v|$? Interprétation géométrique ?

- Soient $z_1, \dots, z_n$ des nombres complexes de module 1. Montrer que

$$z = \left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k}\right)$$

est un réel de $[0, n^2]$.

- Soit $u = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On pose $S = u + u^2 + u^4$.
  (i) Calculer $\overline{S}$, et en déduire $S + \overline{S}$ et $S\overline{S}$.
  (ii) Montrer que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) = -\frac{1}{2}$$

et

$$\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

- Résoudre l'équation

$$\arccos(x) + \arcsin(x^2 - x + 1) = \frac{\pi}{2}.$$

- Trouver l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$\overline{z}(z - 1) = z^2(\overline{z - 1}).$$

- Trouver tous les couples $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ tels que

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 0 \\ uv = 1 \end{cases}$$

- Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Résoudre le système d'inconnues x et y

$$\begin{cases} \cos x \cos y = a + b \\ \sin x \sin y = a - b \end{cases}$$

- Soient u, v deux nombres complexes de module 1. Montrer que si $2 + uv$ est de module 1, alors $uv = -1$.
Que dire de la réciproque ?

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\sqrt{3}\cos^2(x)+2\cos(x)\sin(x)-\sqrt{3}\sin^2(x) = \sqrt{2}.$$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\cos^3(x)\sin(3x) + \sin^3(x)\cos(3x) = \frac{3}{4}.$$

- Tracer le graphe de la fonction

$$x \mapsto \arctan(\tan x).$$