- Démontrer l'inégalité triangulaire complexe.

- Établir les solutions complexes de $e^z = 1$.

- Énoncer et démontrer la formule de Pascal.

- Soient $x, \theta \in \mathbb{R}$. Calculer
$$C = \sum_{k=0}^{n} x^k \cos(k\theta).$$

- Montrer que pour tous $p \leqslant n \in \mathbb{N}$,
$$\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}.$$

- On dit qu'un entier naturel n est somme de deux carrés s'il peut s'écrire a^2+b^2, $a, b \in \mathbb{N}$. Montrer que si n et p sont sommes de deux carrés, alors np aussi.
  En déduire une décomposition en somme de deux carrés de 1394 (on pourra commencer par calculer 41×34)

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$. On pose
$$z = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}.$$
  Calculer $|z|^2$.

- Soit $\omega = e^{2i\pi/n}$. Calculer
$$S = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k.$$

- Soit $\alpha = \frac{1}{\pi} \arccos(1/3)$. Le but est de montrer que α est irrationel, *i.e* ne s'écrit pas comme une fraction d'entiers.
  1. Calculer $e^{i\alpha\pi}$.
  2. Montrer que α est rationnel si et seulement si $\exists n \in \mathbb{N}^*,\ (1+2i\sqrt{2})^n = 3^n$.
  3. Montrer que $(1+2i\sqrt{2})^n$ peut s'écrire $a_n + ib_n\sqrt{2}$, où a_n et b_n sont deux entiers tels que $a_n - b_n$ n'est pas divisible par 3.

- On considère l'équation $(z-1)^n = (z+1)^n$.
  1. Montrer que les solutions sont imaginaires pures.
  2. Motnrer que si z est solution, $-z$ aussi.
  3. Résoudre l'équation.

- Déterminer les complexes tels que z, $\frac{1}{z}$ et $z-1$ aient même module.

- Calculer pour $a \in]0, \pi$ et $n \in \mathbb{N}^*$
$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$$

- Montrer que le réel $0,999\ldots$ (avec une infinité de 9) est en fait égal à 1.

- Soient $n \geqslant 1$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$. Montrer que
$$\prod_{k=1}^{n} (1+x_k) \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k.$$
  En déduire que si les x_i sont supérieurs à 1,
$$n + \prod_{k=1}^{n} x_k \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

- On veut montrer que
$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$
  On pose alors
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor nx \rfloor.$$
  1. Montrer que $\forall x \in [0, \frac{1}{n}[,\ f(x) = 0$.
  2. Montrer que f est $\frac{1}{n}$-périodique.
  3. Conclure.

- Calculer la somme
$$\sum_{k=1}^{n^2} \lfloor \sqrt{k} \rfloor.$$