- Montrer que l'inverse d'une matrice, s'il existe, est unique.

- Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $AB = 0$, alors ni A ni B n'est inversible.

- Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A et B sont inversibles si et seulement si AB l'est.

- Rappeler le principe de l'algorithme du tri par insertion, et son code en Python.

- On dit qu'une matrice M est positive si tous ses coefficients sont positifs. On note $M \geqslant 0$.

  1. Montrer qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est positive *si et seulement si*

  $$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \geqslant 0 \Rightarrow MX \geqslant 0.$$

  On dit qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est monotone si elle est inversible et si son inverse et positif.

  2. Montrer qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est monotone *si et seulement si*

  $$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ MX \geqslant 0 \Rightarrow X \geqslant 0.$$

  Indication : Montrer que l'unique solution de $MX = 0$ est $X = 0$, puis utiliser la question précédente.

- Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

  $$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|.$$

  Montrer que A est inversible.

  Indication : pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $MX = 0$, on pourra considérer l'indice i tel que x_i soit minimal.

- Soit

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  1. Montrer que A est inversible.
  2. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

- Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. On veut montrer que $I_n + M$ est inversible. Soit donc $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $(I_n + M)X = 0_{n,1}$.

  1. Montrer que $\forall Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^{\mathsf{t}}YY \geqslant 0$ et ${}^{\mathsf{t}}YY = 0 \Leftrightarrow Y = 0_{n,1}$.
  2. Montrer que $M^2X = X$, puis que ${}^{\mathsf{t}}(MX)(MX) = -{}^{\mathsf{t}}XX$.
  3. En déduire que $X = 0_{n,1}$.
  4. Conclure.

- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^3, et en déduire que A est inversible, et déterminer son inverse.