- Montrer que l'inverse d'une matrice, s'il existe, est unique.

- Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $AB = 0$, alors ni A ni B n'est inversible.

- Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A et B sont inversibles si et seulement si AB l'est.

- Rappeler le principe de l'algorithme du tri par insertion, et son code en Python.

- On considère la matrice
$$N = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$
  1. Calculer N^2, puis donner une relation entre N^2, N et I_3. N est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
  2. Montrer qu'il existe deux suites (u_n) et (v_n) telles que
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ N^n = u_n N + v_n I_3.$$
  3. Donner une expression explicite de (u_n) et (v_n), puis de N^n.

- Soit $\mathscr{R}$ l'ensemble des matrices du type
$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$
  1. Montrer que le produit de deux matrices de $\mathscr{R}$ reste dans $\mathscr{R}$.
  2. Montrer que les matrices de $\mathscr{R}$ commutent.
  3. Montrer que $I_2 \in \mathscr{R}$.
  4. Montrer que les matrices de $\mathscr{R}$ sont inversibles, et donner leur inverse.

-
  1. Montrer que toute matrice s'écrit de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
  2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation d'inconnue $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
  $$X + {}^{\mathbf{t}}X = \mathrm{Tr}(X)A.$$

- Déterminer le rang de la matrice selon les valeurs de λ
$$\begin{pmatrix} 4-\lambda & 4 & -4 \\ -1 & 5-\lambda & -3 \\ 1 & 7 & -5-\lambda \end{pmatrix}.$$

- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $I + A$ inversible. On pose $B = (I - A)(I + A)^{-1}$.
  1. Montrer que $B = (I + A)^{-1}(I - A)$.
  2. Montrer que $I + B$ est inversible, et exprimer A en fonction de B.

- Calculer les puissances de la matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
  Indication : on pourra utiliser la matrice J n'ayant que des 1 partout.

- Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On définit la fonction $M : x \in \mathbb{R} \mapsto I_3 + xA + \frac{1}{2}x^2 A^2$.
  1. Calculer A^2, A^3 et en déduire A^n pour tout n.
  2. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
  $$M(x + y) = M(x)M(y).$$
  3. En déduire que pour tout n, $M(nx) = M(x)^n$.
  4. Montrer que $M(x)$ est toujours inversible, et donner son inverse.