Exercice 1. Corrections

Exercice 4. • On commence par résoudre l'équation homogène, et on trouve comme solution $y_h(x) = Ke^{-2x}$.
On cherche ensuite une solution par variation de la contante, sous la forme $y_p(x) = K(x)e^{-2x}$. En dérivant, on obtient
$$K'(x) = (y_p'(x) + 2y_p(x))e^{2x} = (x^2 - 2x + 3)e^{2x}.$$
On connaît une primitive de e^{2x}, une de xe^{2x} ($\frac{1}{4}(2x-1)e^{2x}$), et il reste à prouver que $x \mapsto \frac{1}{4}e^{2x}(2x^2 - 2x + 1)$ est une primitive de x^2e^{2x}.
Finalement, une primitive de K' est $\frac{1}{4}(2x^2 - 6x + 9)e^{2x}$, et donc $y_p(x) = \frac{1}{4}(2x^2 - 6x + 9)$.

- Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y_h(x) = Ke^{-x}$.
  On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = K(x)e^{-x}$. On a alors
  $$K'(x) = (y_p'(x) + y_p(x))e^x = \frac{e^x}{1 + e^x}.$$
  On trouve alors $K(x) = \ln(1 + e^x)$, puis $y_p(x) = e^{-x}\ln(1 + e^x)$.
- Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y_h(x) = \frac{K}{\sqrt{x}}$.
  On cherche une solution sous la forme $y_p(x) = \frac{K(x)}{\sqrt{x}}$. On a alors
  $$K'(x) = y_p'(x)\sqrt{x} + y_p(x)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(2xy_p'(x) + y_p(x)\right) = \frac{x^n}{2\sqrt{x}}.$$
  Une primitive est donc
  $$K(x) = \frac{1}{2n+1}x^{n-1}\sqrt{x},$$
  puis $y_p(x)\frac{1}{2n+1}x^n$.
- Une solution de l'équation homogène est de la forme $y_h(x) = K\frac{e^x}{x+1}$.
  On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = K(x)\frac{e^x}{x+1}$, et on obtient
  $$\begin{aligned} K'(x) &= y_p'(x)(x+1)e^{-x} + y_p(x)(e^{-x} - (x+1)e^{-x}) \\ &= e^{-x}((x+1)y_p'(x) - xy_p(x)) \\ &= -e^{-x} \end{aligned}$$
  On trouve donc $K(x) = e^{-x}$, puis $y_p(x) = \frac{1}{x+1}$.

Exercice 5. (i) On trouve tout de suite
$$q(x) = CV + Ke^{-\frac{1}{RC}t},$$
puis en utilisant $q(0) = 0$, on a $K = -CV$, et donc
$$q(x) = CV(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}).$$

(ii) De la même façon, les constantes étant positives, on a
$$q(x) = CV + K_1\cos(\omega t) + K_2\sin(\omega y),$$
avec $\omega = (LC)^{-1/2}$.
En utilisant $q(0) = q'(0) = 0$, et finalement
$$q(x) = CV(1 - \cos(\omega t).$$

Exercice 6. Par composées de fonctions dérivables, f' est donc dérivable, et
$$\forall x,\ f''(x) = -f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -f(x).$$
f est donc solution de $y'' + y = 0$, et donc
$$f(x) = K_1\cos(x) + K_2\sin(x).$$
On a donc :
$$f'(x) = -K_1\sin(x) + K_2\cos(x)$$
Comme $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(0)$, on a donc $-K_1 = K_1$, et donc $K_1 = 0$.
Réciproquement, toute fonction de la forme $f(x) = K\sin(x)$ vérifie
$$f'(x) = K\cos(x) = K\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Exercice 7.

- On résout l'équation homogène, qui admet pour équation caractéristique $r^2 + 8y + 15 = 0$. Les solutions sont $r_1 = -3$ et $r_2 = -5$. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme
$$y_h(x) = Ae^{-3x} + Be^{-5x}.$$
Une solution particulière évidente est $y_p(x) = \frac{1}{3}$.
- On commence par résoudre l'équation $y'' - 2y' = 2$. Les solutions sont exactement les
$$y(x) = Ke^{2x} - 1.$$
Pour trouver les solutions de l'équation du départ, il suffit d'en prendre les primitives :
$$y(x) = Ke^{2x} - x + C.$$
- On résout l'équation homogène. L'équation caractéristique est $r^2 + 3r + 2 = 0$, dont les solutions sont -1 et -2. On a donc
$$y_h(x) = Ae^{-x} + Be^{-2x}.$$
Maintenant, on cherche une solution sous la forme Ke^x, puis on trouve $K = \frac{1}{6}$.
- Les solutions de l'équation homogène sont
$$y_h(x) = A\cos(x) + B\sin(x).$$
On cherche une solution sous la forme $y_p(x) = K_1 x\cos(x) + K_2 x\sin(x)$. On a alors
$$y_p'(x) = K_1\cos(x) - K_1 x\sin(x) + K_2\sin(x) + K_2 x\cos(x)$$
et
$$y_p''(x) = -K_1\sin(x) - K_1\sin(x) - K_1 x\cos(x) + K_2\cos(x) + K_2\cos(x) - K_2 x\sin(x).$$
Finalement
$$y_p''(x) + y_p(x) = -2K_1\sin(x) + 2K_2\cos(x) = \sin(x),$$
et donc $K_1 = -\frac{1}{2}$ et $K_2 = 0$.