Devoir libre 2

Angers Le Fresne : BCPST 1

Pour le vendredi 05 octobre

Dans ce devoir, la clarté et la précision du raisonnement seront primordiales. Les résultats seront encadrés, les pages numérotées, *etc.*

Les exercices sont indépendants, et pourront être traîtés dans l'ordre souhaité.

Exercice 1. Une équation trigonométrique

Le but de cet exercice est de résoudre le système suivant :

$$(\mathcal{S})\begin{cases} \cos x - \cos y & = \frac{1}{2} \\ \sin x \sin y & = \frac{3}{8} \end{cases}$$

1. *Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

On note que

$$\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{y}{2}) + \sin(\frac{y}{2})\cos(\frac{x}{2})$$

et

$$\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) = \sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{y}{2}) - \sin(\frac{y}{2})\cos(\frac{x}{2}).$$

Le produit des deux fait donc

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) &= \sin^2(\frac{x}{2})\cos^2(\frac{y}{2}) - \cos^2(\frac{x}{2})\sin^2(\frac{y}{2}) \\ &= \cos^2(\frac{y}{2}) - \cos^2(\frac{x}{2})\cos^2(\frac{y}{2}) - \cos^2(\frac{x}{2}) + \cos^2(\frac{x}{2})\cos^2(\frac{y}{2}) \\ &= \frac{1}{2}(1+\cos(y)) - \frac{1}{2}(1+\cos(x)) \\ &= \frac{1}{2}(\cos(y) - \cos(x)) \end{aligned}$$

Il suffit donc de multiplier par -2 pour avoir le résultat.

2. *On pose $a = \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$ et $b = \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$.*
Montrer que le système $\mathcal{S}$ est équivalent à

$$(\mathcal{S}')\begin{cases} ab & = -\frac{1}{4} \\ a^2 - b^2 & = \frac{3}{8} \end{cases}$$

La première ligne du système devient donc directement $ab = -\frac{1}{4}$.
Une combinaison astucieuse des formules de sommes donne

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)).$$

De plus,
$$\cos(x-y) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x-y}{2}\right) \text{ et } \cos(x+y) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x+y}{2}\right).$$
On a donc
$$\sin x \sin y = a^2 - b^2.$$

3. *Montrer que les solutions de (S') sont exactement $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ et $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.*

   Il est clair que a et b sont non nuls, sinon la première équation ne serait pas satisfaite. On peut donc écrire $b = -\frac{1}{4a}$, puis
$$16a^4 - 6a^2 - 1 = 0.$$
   On peut factoriser
$$16a^4 - 6a^2 - 1 = (8a^2+1)(2a^2-1)$$
   pour trouver les solutions proposées.

   Réciproquement, ce sont bien des solutions.

4. *En déduire toutes les solutions de $(\mathcal{S})$.*

   On pourra utiliser le nombre $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\sin(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. On fait les deux cas possibles.

   - $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $b = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$: on a alors
$$\left\{\begin{array}{ll} & \frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} & \frac{x+y}{2} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right.$$
     et
$$\left\{\begin{array}{ll} & \frac{x-y}{2} = -\alpha + 2k\pi \\ \text{ou} & \frac{x-y}{2} = \pi + \alpha + 2k\pi \end{array}\right.$$
     La résolution du système donne alors quatre solutions
$$\left\{\left(\frac{\pi}{4} - \alpha; \frac{\pi}{4} + \alpha\right); \left(-\frac{3\pi}{4} + \alpha; -\frac{3\pi}{4} - \alpha\right); \left(\frac{3\pi}{4} - \alpha; \frac{3\pi}{4} + \alpha\right); \left(-\frac{\pi}{4} + \alpha; -\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right\},$$
     auxquelles on peut rajouter $2k\pi$.
   - $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $b = \frac{1}{2\sqrt{2}}$: de la même façon, on obtient les mêmes solutions que dans le cas précédent.

Exercice 2. Une équation complexe

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On cherche à montrer que les solutions de l'équation
$$pz^p = \sum_{k=0}^{p-1} z^k$$
sont de modules strictement inférieurs à 1.

1. *Montrer que pour tout $x \in]1, \infty[$,*
$$px^{p+1} - (p+1)x^p + 1 > 0.$$

   Soit
$$\varphi : \begin{array}{rcl} [1, \infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & px^{p+1} - (p+1)x^p + 1 \end{array}.$$
   Alors φ est dérivable, et
$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \varphi'(x) = p(p+1)x^p - p(p+1)x^{p-1} = p(p+1)x^{p-1}(x-1).$$
   La dérivée est donc strictement positive sur $]1, \infty[$, et la fonction φ est strictement croissante sur cet intervalle. On a de plus $\varphi(0) = 0$, et donc le résultat voulu.

2. *En déduire que les solutions de l'équation sont de modules inférieurs à 1.* Soit z une solution, qu'on suppose de module strictement supérieur à 1.

   Alors par l'inégalité triangulaire, on a nécessairement

$$|pz^p| \leqslant \sum_{k=0}^{p-1} |z|^k = \frac{|z|^p - 1}{|z| - 1}.$$

   On a donc, en notant $r = |z|$,

$$pr^p(r-1) \leqslant r^p - 1,$$

   et donc

$$pr^{p+1} - (p+1)r^p + 1 \leqslant 0,$$

   et on a vu dans la question précédente que c'était impossible.

3. *Soit z une solution de l'équation de module 1. Soit θ un argument de z.*

   Montrer que $e^{\frac{i(p+1)\theta}{2}}$ est un nombre réel, qu'on calculera.

   Soit $z = e^{i\theta}$ différent de 1, solution de (E_p).

   On a alors

$$\begin{aligned} pz^p &= pe^{ip\theta} \\ &= \frac{1 - e^{ip\theta}}{1 - e^{i\theta}} \\ &= \frac{-2i\sin(p\theta/2)e^{ip\theta/2}}{-2i\sin(\theta/2)e^{i\theta/2}} \end{aligned}$$

$$\frac{\sin(p\theta/2)}{p\sin(\theta/2)} = e^{i(p+1)\theta/2}$$

4. *En déduire une contradiction, puis conclure.*

   On a donc $e^{i(p+1)\theta/2}$ réel, et donc $(p+1)\theta/2 = k\pi$, soit $p = \frac{2k\pi - \theta}{\theta}$.

   On obtient alors

$$e^{i(p+1)\theta/2} = (-1)^k = \frac{\sin(-\theta/2 + k\pi)}{p\sin(\theta/2)} = -\frac{(-1)^k}{p},$$

   et on en déduit

$$p = -1.$$