Devoir libre 4

Angers Le Fresne : BCPST 1

Pour le mardi 22 janvier

Dans ce devoir, la clarté et la précision du raisonnement seront primordiales. Les résultats seront encadrés, les pages numérotées, *etc.*

Les exercices sont indépendants, et pourront être traîtés dans l'ordre souhaité.

Exercice 1. Géométrie (Oral 2017 Agro-Véto)

On rappelle la définition suivante :

DÉFINITION

Soient P un plan de l'espace et u un vecteur. Le projeté orthogonal de u sur P est l'unique vecteur w vérifiant

$$w \in P \text{ et } w - u \perp P.$$

1. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels non nuls.

   Écrire une fonction Python qui renvoie `True` si $a_i^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k^2} \geqslant 2$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et qui renvoie `False` sinon.

   La fonction aura pour seul paramètre une liste contenant les réels $a_1, \ldots, a_n$.

2. On considère les vecteurs $u = (1, 0, 0)$, $v = \sqrt{2}(0, 1, 0)$, $w = \sqrt{2}(0, 0, 1)$ et P le plan de $\mathbb{R}^3$ admettant pour équation dans la base canonique :

   $$y - z = 0.$$

   Déterminer les projetés orthogonaux des vecteurs u, v, w sur le plan P et vérifier qu'ils ont même norme.

3. Soient $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ et a_1, a_2, a_3 trois réels tous non nuls.

   On suppose qu'il existe un plan P tel que les projetés orthogonaux des vecteurs a_1e_1, a_2e_2 et a_3e_3 sur ce plan aient tous la même norme que l'on notera d.

   On considère deux vecteurs unitaires de P ε_1 et ε_2, orthogonaux, et un vecteur unitaire ε_3 normal à P.

   On note p la projection orthogonale sur le plan P.

   (a) Vérifier que pour tout $u \in \mathbb{R}^3$,
   $$p(u) = (u \cdot \varepsilon_1)\varepsilon_1 + (u \cdot \varepsilon_2)\varepsilon_2.$$

   (b) Montrer que pour tous $u \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
   $$p(\lambda u) = \lambda p(u).$$

   (c) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on a
   $$(e_i \cdot \varepsilon_1)^2 + (e_i \cdot \varepsilon_2)^2 = \left(\frac{d}{a_i}\right)^2.$$

   (d) Montrer que
   $$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{a_i^2} = \frac{2}{d^2}.$$
   Indication : on pourra noter $\varepsilon_i = (x_i, y_i, z_i)$ et utiliser la norme des ε_i.

   (e) Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, montrer que $|a_i| \geqslant d$.
   Indication : On se rappellera que $p(a_ie_i) - a_ie_i$ et ε_3 sont colinéaires.

   (f) En déduire que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$
   $$a_i^2 \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{a_k^2} \geqslant 2.$$

Exercice 2. Des oiselles (G2E 2018)

On rappelle que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à p lignes et p colonnes et à coefficients réels. Par convention, si $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ alors M^0 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel. On s'intéresse à une population d'oiseaux notée $\mathcal{P}_1$. Dans cette population, la moitié sont des oiselles (c'est-à-dire des femelles) et on modélise l'évolution de l'effectif de ces oiselles en fonction de n, le nombre d'années écoulées depuis un instant initial correspondant à $n = 0$.

1. Soient les deux matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ \frac{3}{20} & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$
   (a) Calculer $\det(P)$ puis P^{-1}.
   (b) Démontrer qu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$.

2. Les oiselles de $\mathcal{P}_1$ sont classées en deux catégories :
   - les oiselles jeunes, c'est-à-dire celles qui sont âgées de moins d'un an. L'effectif des oiselles jeunes est noté j_n.
   - les oiselles adultes, c'est-à-dire celles qui sont âgées d'au moins un an. L'effectif des oiselles adultes est noté a_n.

   Une étude sur le terrain a permis de conclure que :
   - chacune de ces oiselles donne naissance en moyenne à une oiselle pendant sa première année de vie et à 5 oiselles pendant sa deuxième année.
   - 15% des oiselles survivent au delà de leur première année mais jamais au delà de leur seconde année.

   On note :
$$X_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} \text{ et } X'_n = P^{-1}X_n.$$
   (a) Justifier que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) À l'aide d'une démonstration par récurrence, en déduire une expression de X'_n en fonction de X'_0 et D.
   (c) En supposant j_0 et a_0 non nuls, démontrer que j_n et a_n sont équivalents à des termes généraux de suites géométriques.