Devoir libre 5

Angers Le Fresne : BCPST 1

Pour le 26 Février 2019

Dans ce devoir, la clarté et la précision du raisonnement seront primordiales. Les résultats seront encadrés, les pages numérotées, *etc.*

Si vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez le sujet.

Exercice 1. Une fonction

Soit t un réel positif ou nul. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$P_t(x) = x^3 + tx - 1.$$

1. Montrer que le polynôme P_t admet une unique racine réelle $u(t)$.
2. On note u l'application définie sur $\mathbb{R}^+$ qui, à tout réel positif t associe $u(t)$.
   (a) Montrer que $u(\mathbb{R}^+) \subseteq]0,1]$.
   (b) Démontrer que la fonction u est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
   (c) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t)$.
   Indication : utiliser l'expression de $P_t(u(t))$.
   (d) Montrer que l'application u est bijective de $\mathbb{R}^+$ vers $]0,1]$, de réciproque :
   $$v : \begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ y & \longmapsto & \frac{1-y^3}{y} \end{array}.$$
   (e) Écrire un programme Python qui trace la fonction v sur $]0,1]$. En déduire une représentation de u, qu'on dessinera.
   (f) Justifier que la fonction u est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 2. Tirages dans N urnes

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère N urnes, numérotées de 1 à N, sachant que pour chaque urne i, l'urne numéro i contient i jetons numérotés de 1 à i. On considère l'épreuve aléatoire consistant en une suite de tirages selon les règles suivantes :

- le premier tirage est effectué dans l'urne numérotée N ;
- si le jeton obtenu au k-ème tirage porte le numéro i, alors le $(k+1)$-ème tirage est effectué dans l'urne numérotée i ;
- les différents jetons d'une même urne sont tirés équiprobablement.

On note, pour chaque entier naturel k non nul et $j \in [\![1, N]\!]$, X_k^j l'événement "Le k-ième tirage donne un jeton numéroté j".

1. Calculer X_1^j pour tout j entre 1 et N.

2. Écrire une fonction Python, prenant en argument un entier N, qui simule l'expérience aléatoire ci-dessus, et renvoie le nombre de tirages nécessaires à l'obtention du premier 1.

3. Établir, pour k entier naturel non nul et $i \in [\![1, N]\!]$:

$$P(X_{k+1}^i) = \sum_{j=i}^{N} \frac{1}{j} P(X_k^j).$$

4. Montrer que pour tout k entier naturel non nul, la suite finie $(P(X_k^i))_{1 \leqslant i \leqslant N}$ est décroissante.

5. (a) Montrer que la suite $(P(X_k^1))_{k \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, puis justifier qu'elle est convergente.

   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X_{k+1}^1) \geqslant P(X_k^1) + \frac{1}{N}(1 - P(X_k^1)).$$

   (c) En déduire que $\lim\limits_{k \to \infty} P(X_k^1) = 1$.
   Que peut-on dire de l'événement "Tous les tirages donnent un numéro différent de 1" ?