Devoir libre 5

Angers Le Fresne : BCPST 1

Pour le 26 Février 2019

Exercice 1. Une fonction

1. La fonction P_t est dérivable, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_t'(x) = 3x^2 + t$. Pour tout $x \neq 0$, $P_t'(x) > 0$, et donc P_t est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   De plus, elle est continue comme application polynomiale.

   Comme $P_t(0) = -1 < 0$ et $P_t(1) = t \geqslant 0$, par théorème de la bijection, P_t s'annule exactement une fois sur $\mathbb{R}$.

2. (a) Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Alors comme $P_t(0) < 0$ et $P_t(1) = t$, la racine de P_t $u(t)$ est dans $]0, 1]$.

   (b) Soient $t < t'$ dans $\mathbb{R}^+$. Alors
   $$P_t(u(t')) = u(t')^3 + tu(t') - 1.$$
   Or
   $$P_{t'}(u(t')) = u(t')^3 + t'u(t') - 1 = 0$$
   et donc $u(t')^3 - 1 = t'u(t')$. Finalement,
   $$P_t(u(t')) = (t - t')u(t') < 0$$
   car $u(t') \in]0, 1]$.
   On a donc par stricte croissante de P_t, $u(t') < u(t)$, et donc u est strictement décroissante.

   (c) La fonction u est décroissante et minorée, et donc admet une limite en $+\infty$, notée ℓ dans $[0, 1]$. Supposons que $\ell > 0$. Soit $t \geqslant 0$ (on note que $u(t) \neq 0$). Alors, par définition de $u(t)$,
   $$u(t)^3 + tu(t) - 1 = 0 \text{ et donc } t = \frac{1 - u(t)^3}{u(t)}.$$
   Or le membre de gauche tend vers $+\infty$, et celui de droite vers $\frac{1-\ell^3}{\ell} \in \mathbb{R}$. D'où une contradiction.
   Donc
   $$\lim_{t \to +\infty} u(t) = 0.$$

   (d) Soit $y \in]0, 1]$. Alors
   $$u \circ v(y) = u\left(\frac{1 - y^3}{y}\right).$$
   $u \circ v(y)$ est donc l'unique solution de
   $$x^3 + \frac{1 - y^3}{y}x - 1 = 0,$$
   et y en est clairement solution. Donc $u \circ v(y) = y$.
   Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Alors
   $$v \circ u(t) = \frac{1 - u(t)^3}{u(t)} = t.$$
   Finalement, u est bijective, de réciproque v.

(e) On peut écrire le programme suivant

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def f(N):
    x = np.linspace(1/N,1,N)
    y = (1-x**3)/x
    plt.clf()
    plt.plot(x,y)

f(100)
plt.show()
```

On en déduit la représentation de u en prenant le symétrique de la courbe de v par rapport à la première bissectrice.

(f) La fonction v est une fonction continue et bijective sur un intervalle de $\mathbb{R}$, et donc par le théorème de la bijection, v est un homéomorphisme : sa réciproque, la fonction u, est donc dérivable.

Exercice 2. Tirages dans N urnes

1. Le premier tirage est dans l'urne N, qui contient N jetons. On a donc

$$P(X_1^j) = \frac{1}{n}.$$

2. On peut utiliser le code suivant :

```
import random as rd

def f(N):
    i = N
    n=0
    while (i!=1):
        i = rd.randint(1,i)
        n+=1
    return n
```

3. Soient donc k et i. Par la formule des probabilités totales

$$P(X_{k+1}^i) = \sum_{j=1}^{N} P_{X_k^j}(X_{k+1}^i)P(X_k^j).$$

Or, si $j < i$ et que le tirage k a donné le jeton j, il est impossible de tirer le jeton i au tirage suivant, donc $P_{X_k^j}(X_{k+1}^i) = 0$.

Si $j \geqslant i$, et que le tirage k a donné le jeton j, alors le tirage suivant a lieu dans l'urne j qui contient j jetons équiprobables. La probabilité de chacun d'entre eux est donc $\frac{1}{j}$.

D'où

$$P(X_{k+1}^i) = \sum_{j=i}^{N} \frac{1}{j} P(X_k^j).$$

4. On a déjá vu que la suite (X_1^i) est décroissante, car constante. Maintenant, soit $i < N$. Alors

$$\begin{aligned} P(X_{k+1}^{i+1}) - P(X_{k+1}^{i}) &= \sum_{j=i+1}^{N} \frac{1}{j} P(X_k^j) - \sum_{j=i}^{N} \frac{1}{j} P(X_k^j) \\ &= -\frac{1}{i} P(X_k^i) \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$

La suite est donc décroissante.

5. (a) D'après la question 3,

$$P(X_{k+1}^1) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} P(X_k^j) = P(X_k^1) + \sum_{j=2}^{N} \frac{1}{j} P(X_k^j),$$

et donc la suite est bien croissante. Elle est clairement majorée par 1, et donc converge.

(b) Reprenons l'égalité précédente :

$$\begin{aligned} P(X_{k+1}^1) &= P(X_k^1) + \sum_{j=2}^{N} \frac{1}{j} P(X_k^j) \\ &\geqslant P(X_k^1) + \frac{1}{N} \sum_{j=2}^{N} P(X_k^j) \end{aligned}$$

car $\frac{1}{j} \geqslant \frac{1}{N}$ pour tout j.

Or $\sum_{j=1}^{N} P(X_k^j) = 1$, et donc $\sum_{j=1}^{N} P(X_k^j) = 1 - P(X_k^1)$.

(c) La suite étant convergente vers un $\ell \in [0, 1]$, on a donc dans l'égalité précédente

$$\ell \geqslant \ell + \frac{1}{N}(1 - \ell),$$

et donc $\ell \geqslant 1$. Comme $\ell \leqslant 1$, on a donc nécessairement $\ell = 1$.

L'événement proposé est donc de probabilité nulle.