

Devoir libre 6

Angers Le Fresne : BCPST 1

Pour le 23 Avril 2019

Dans ce devoir, la clarté et la précision du raisonnement seront primordiales. Les résultats seront encadrés, les pages numérotées, etc.

Si vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez le sujet.

On suppose donnés $a, b, c \in \mathbb{R}$ vérifiant $a < b < c$ et $u, v, w \in \mathbb{R}^*$. On considère pour tout $t \neq 0$ l'équation d'inconnue λ

$$\frac{u^2}{\lambda - a} + \frac{v^2}{\lambda - b} + \frac{w^2}{\lambda - c} = \frac{1}{t} \quad (E_t).$$

1. Donner les variations de la fonction

$$F : \lambda \mapsto \frac{u^2}{\lambda - a} + \frac{v^2}{\lambda - b} + \frac{w^2}{\lambda - c}.$$

En déduire que F prend la valeur 0 en deux points ρ_1 et ρ_2 vérifiant $\rho_1 < \rho_2$.

2. Tracer le graphe de la fonction F pour $a = -2, b = 0, c = 2$ et $u = v = w = 1$.

3. Dans la suite, a, b, c sont de nouveaux quelconques et vérifient $a < b < c$.

(a) Montrer que pour tout $t \neq 0$, l'équation (E_t) admet trois racines réelles distinctes, notées $\lambda_1(t) < \lambda_2(t) < \lambda_3(t)$.

Indication : On distinguera deux cas, selon que $t > 0$ ou $t < 0$.

(b) Montrer que $\lambda_1(t)$ tend vers a quand t tend vers 0 par valeurs positives puis que $\lambda_1(t)$ tend vers a quand t tend vers 0 par valeurs négatives.

On admettra que les deux fonctions λ_2 et λ_3 admettent également des limites en 0, respectivement b et c .

On notera encore λ_1, λ_2 et λ_3 les fonctions prolongées par $\lambda_1(0) = a, \lambda_2(0) = b, \lambda_3(0) = c$.

4. Continuité et dérivabilité.

(a) Montrer que les fonctions λ_1, λ_2 et λ_3 sont continues sur \mathbb{R} .

(b) En utilisant l'égalité (E_t) pour $\lambda = \lambda_1(t)$, montrer que $\frac{\lambda_1(t) - a}{t}$ tend vers u^2 quand t tend vers 0. En déduire que λ_1 est dérivable sur \mathbb{R} .

(c) Montrer de même que λ_2 et λ_3 sont dérivables sur \mathbb{R} ; donner $\lambda_2'(0)$ et $\lambda_3'(0)$.

5. Étude des fonctions à l'infini.

(a) Caractériser les limites éventuelles des fonctions λ_1, λ_2 et λ_3 lorsque t tend vers $+\infty$, puis lorsque t tend vers $-\infty$.

Résumer les résultats sous forme d'un tableau à deux entrées.

(b) Exprimer $\frac{u^2}{\lambda_1(t) - a}$ à l'aide de $\frac{1}{\lambda_1(t)}$, $\frac{1}{\lambda_1(t)^2}$ et d'une fonction négligeable devant $\frac{1}{\lambda_1(t)^2}$ quand t tend vers $-\infty$.

En déduire l'existence d'une asymptote à la fonction λ_1 en $-\infty$. Qu'en est-il pour la fonction λ_3 en $+\infty$?

(c) Dresser le tableau de variations des fonctions λ_1, λ_2 et λ_3 . Tracer sur une même feuille les graphes de ces fonctions pour $a = -2, b = 0, c = 2$ et $u = v = w = 1$.