Devoir libre 1 : Trigonométrie hyperbolique

Pour le FIXME

Dans ce devoir, la clarté et la précision du raisonnement seront primordiales. Les résultats seront encadrés, les pages numérotées, *etc.*

Question préliminaire

Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se décompose comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, i.e.

$$\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \exists u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \textit{ paire},\ \exists v : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \textit{ impaire},\ f = u + v.$$

On raisonne par analyse-synthèse :

- Analyse :
  On suppose qu'on a les deux fonctions u et v recherchées. On a alors $f = u + v$, donc par parité et imparité,
  $$\begin{aligned} f(x) &= u(x) + v(x) \\ f(-x) &= u(x) - v(x) \end{aligned}$$
  Un rapide système d'équation nous donne donc $u(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$, et $v(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$.
  On a donc montré que si de telles fonctions existent, elles sont naturellement données par les fonctions sus-citées.
- Réciproquement, on peut décomposer
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}(f(x) + f(-x))}_{u(x)} + \underbrace{\frac{1}{2}(f(x) - f(-x))}_{v(x)},$$
  et on a bien pour tout x
  $$\begin{aligned} u(-x) &= \frac{1}{2}(f(-x) + f(x)) = u(x) \\ v(-x) &= \frac{1}{2}(f(-x) - f(x)) = -v(x) \end{aligned}$$

Trigonométrie hyperbolique

Dans la décomposition précédente appliquée à l'exponentielle, on appelle *cosinus hyperbolique* la partie paire et *sinus hyperbolique* la partie impaire.

Partie A : Étude du cosinus hyperbolique

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

1. *Montrer que la fonction* ch *est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et calculer sa dérivée.*
   La fonction ch est une somme de fonctions dérivables, donc est dérivable. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$

   $$\mathrm{ch}'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

2. *Calculer les limites de* ch *en* $-\infty$ *et* $+\infty$.
   On a $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$, donc $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$.
   De même, $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$.

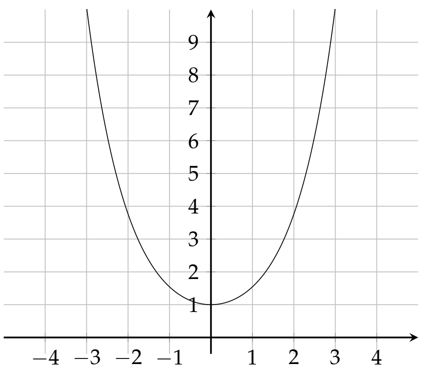
3. *Dresser le tableau de variation complet de* ch.
   On commence par chercher le signe de la dérivée :

   $$\begin{aligned} \mathrm{ch}'(x) \geqslant 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow e^x \geqslant e^{-x} \\ &\Leftrightarrow e^{2x} \geqslant 1 \text{ car } e^{-x} > 0 \\ &\Leftrightarrow 2x \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow x \geqslant 0 \end{aligned}$$

   On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $\mathrm{ch}'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4. *Tracer la courbe de la fonction* ch.



5. *Montrer que*
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) \geqslant 1 + \frac{x^2}{2}.$$

On pose $\varphi(x) = \mathrm{ch}(x) - 1 - \frac{x^2}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\varphi'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - x.$$

NOTA

On ne peut pas étudier facilement le signe de φ'.

φ' est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\varphi''(x) = \mathrm{ch}(x) - 1.$$
Or on peut facilement vérifier que $\mathrm{ch}(x) \geqslant 1$ pour tout x, et donc $\varphi''(x) \geqslant 0$ pour tout x.
φ' est donc croissante sur $\mathbb{R}$, et comme $\varphi'(0) = 0$, on en déduit le tableau de signes de φ', puis le tableau de variations de φ.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de φ'		$-$	0	$+$	
Variations de φ		$\searrow$	0	$\nearrow$	

La fonction φ est donc toujours positive, et donc l'inégalité cherchée est vraie.

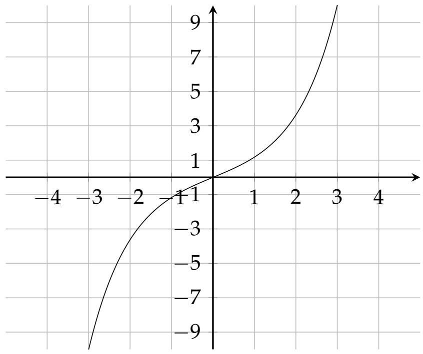
Partie B : Étude du sinus hyperbolique

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. *Montrer que la fonction* sh *est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et calculer sa dérivée.* De la même façon que pour ch, sh est dérivable et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$.
2. *Calculer les limites de* sh *en* $-\infty$ *et* $+\infty$.
   On a $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$, donc $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$.
   De même, $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$.
3. *Dresser le tableau de variation complet de* sh.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $\mathrm{sh}'(x)$		$+$	
Variations de sh	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4. *Tracer la courbe de la fonction* sh.



5. *En étudiant les fonctions* $x \mapsto \mathrm{sh}(x) - mx$*, montrer que* sh *n'admet aucune asymptote.* On pose $\psi_m : x \mapsto \mathrm{sh}(x) - mx$ pour tout $m \in \mathbb{R}$. ψ_m est alors dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\psi_m'(x) = \mathrm{ch}(x) - m = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} - m.$$

   Quand $x \to \infty$, on a

$$\psi_m'(x) = e^x\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2x} - me^{-x}\right)$$

   qui tend vers $+\infty$. Il n'y a donc pas d'asymptote en $+\infty$.
   Quand $x \to -\infty$, on a

$$\psi_m'(x) = e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2} - me^{x}\right)$$

   qui tend vers $+\infty$. Il n'y a donc pas d'asymptote en $-\infty$.

6. *Soit* $y \in \mathbb{R}$*. Résoudre l'équation d'inconnue* x

$$\mathrm{sh}(x) = y.$$

   Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{sh}(x) = y &\Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2y \\ &\Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 2ye^x \\ &\Leftrightarrow X^2 - 2yX - 1 = 0 \text{ où } X = e^x \end{aligned}$$

   On résout cette équation du second degré : le discriminant vaut $4(y^2+1)$, et les solutions sont donc

$$X_1 = y - \sqrt{y^2+1} \text{ et } X_2 = y + \sqrt{y^2+1}.$$

   La première solution est négative, et ne convient donc pas. La deuxième solution donne $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$.
   En déduire la fonction réciproque de sh *; on l'appelle* Argsh.
   On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{Argsh}(x) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).$$

7. *Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}(\operatorname{Argsh}(x)) = x$ et $\operatorname{Argsh}(\operatorname{sh}(x)) = x$.* Soit $x \in \mathbb{R}$. Faisons les calculs :

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}(\operatorname{Argsh}(x)) &= \frac{1}{2}\left(e^{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} - e^{-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2 + x^2 + 1 + 2x\sqrt{x^2+1} - 1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2x^2 + 2x\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) \\
&= x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Argsh}(\operatorname{sh}(x)) &= \ln\left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + \sqrt{\left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)^2 + 1}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + \sqrt{\frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} - 2) + 1}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + \sqrt{\frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2)}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + \sqrt{\left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right)^2}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + \sqrt{\left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right)^2}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right) \\
&= \ln(e^x) \\
&= x
\end{aligned}$$

Partie C : Relations algébriques

1. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que*
$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b).$$

   On part de la fin :

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) &= \frac{1}{2}\left(e^a + e^{-a}\right)\frac{1}{2}\left(e^b + e^{-b}\right) + \frac{1}{2}\left(e^a - e^{-a}\right)\frac{1}{2}\left(e^b - e^{-b}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{a+b} + e^{a-b} + e^{b-a} + e^{-a-b} + e^{a+b} - e^{a-b} - e^{b-a} + e^{-a-b}\right) \\
&= \operatorname{ch}(a+b)
\end{aligned}$$

2. *Trouver une formule analogue pour $\operatorname{sh}(a+b)$.*
   De la même façon, on trouve
$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b).$$

3. *Montrer que*
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On calcule :
$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 &= \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2) - \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} - 2) \\ &= 1\end{aligned}$$

Partie D : Étude de la tangente hyperbolique

Comme en trigonométrie classique, on appelle *tangente hyperbolique* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}.$$

1. *Calculer la dérivée de* th. th est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables, ch ne s'annulant jamais sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}\mathrm{th}'(x) &= \frac{\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2}{\mathrm{ch}(x)^2} \\ &= \frac{1}{\mathrm{ch}(x)^2} \text{ d'après le résultat de la partie C}\end{aligned}$$

   On peut aussi trouver $\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}(x)^2$.

2. *Montrer qu'on peut exprimer* $\mathrm{ch}(x)$ *et* $\mathrm{sh}(x)$ *en fonction de l'angle moitié,* i.e. *en fonction de* $\mathrm{th}(\frac{x}{2})$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $t = \mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)$.
   On peut vérifier que
$$\mathrm{ch}(x) = \frac{1+t^2}{1-t^2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{2t}{1-t^2}$$