Devoir surveillé 1

Angers Le Fresne : BCPST 1

22 Septembre 2018

Dans ce devoir, la clarté et la précision du raisonnement seront primordiales. Les résultats seront encadrés, les pages numérotées, *etc.*

Les exercices sont indépendants, et pourront être traîtés dans l'ordre souhaité.

Exercice 1. Parties convexes de $\mathbb{R}$

Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est dit *convexe* si

$$\forall a, b \in A,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \in [a, b] \Rightarrow x \in A.$$

1. *Montrer que tout intervalle est convexe.*

   Soit donc I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $a, b \in I$ et $x \in \mathbb{R}$. Supposons que $x \in [a, b]$, et montrons que $x \in I$. Par définition, on a donc $a \leqslant x \leqslant b$. Plusieurs cas se présentent alors :

   - Si I est de la forme $[\alpha, \beta]$: on a alors $a \geqslant \alpha$ et $b \leqslant \beta$, et on a alors bien $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$.
   - Si I est de la forme $]\alpha, \beta[$: on a alors $a < \alpha$ et $b > \beta$, et on a alors bien $\alpha < x < \beta$.
   - Si I est de la forme $]\alpha, \beta]$: on a alors $a > \alpha$ et $b \leqslant \beta$, et on a alors bien $\alpha < x \leqslant \beta$.
   - Si I est de la forme $[\alpha, \beta[$: on a alors $a \geqslant \alpha$ et $b < \beta$, et on a alors bien $\alpha \leqslant x < \beta$.
   - Si I est de la forme $[\alpha, \infty[$ (resp. $]\alpha, \infty[$), alors $a \geqslant \alpha$ (resp. $a > \alpha$), et on a alors bien $x \geqslant \alpha$ (resp. $x > \alpha$)
   - Si I est de la forme $]-\infty, \beta]$ (resp. $]-\infty, \beta[$), alors $b \leqslant \beta$ (resp. $b < \beta$), et on a alors bien $x \leqslant \beta$ (resp. $x < \beta$)
   - Si $I = \mathbb{R}$, c'est évident.

On veut maintenant montrer la réciproque : tout ensemble convexe de $\mathbb{R}$ est un intervalle.

Soit donc A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et convexe.

2. *On suppose que A est majoré. Montrer le lemme suivant :*

   $$\textit{Si } x < \sup A, \textit{ alors il existe } y \in A \textit{ tel que } x < y < \sup A.$$

   On admet le lemme dual suivant :

   $$\textit{Si } A \textit{ est minoré, alors pour tout } x > \inf A, \textit{ il existe } y \in A \textit{ tel que } \inf A < y < x.$$

   Commençons par noter que la borne supérieure de A existe bien par le théorème de la borne supérieure, car A est non vide et majoré.

   Soit donc $x < \sup A$. Par définition de borne supérieure, $\sup A$ est le plus petit majorant de A. Comme $x < \sup A$, x ne peut pas être un majorant de A, et donc on peut trouver $y > x$ tel que $y \in A$. Comme $y \in A$, on a donc forcément $y \leqslant \sup A$.

3. *On suppose que A est borné, et que* $\inf A$ *et* $\sup A$ *sont dans A. Montrer que $A = [\inf A, \sup A]$.*

   L'inclusion directe est claire : si $x \in A$, alors $\inf A \leqslant x \leqslant \sup A$.

   Réciproquement, soit $x \in [\inf A, \sup A]$. Alors par convexité, $x \in A$.

4. *On suppose que A est borné, et que* $\inf A$ *et* $\sup A$ *ne sont pas dans A. Montrer que* $A =]\inf A, \sup A[$.

   Comme dans la question précédente, l'inclusion directe est triviale.

   Soit donc $x \in]\inf A, \sup A[$. Par les lemmes, on a donc $y_1, y_2 \in A$ tels que

$$x < y_1 < \sup A \text{ et } \inf A < y_2 < x.$$

   On a donc $x \in [y_1, y_2]$, et par convexité $x \in A$.

5. *On suppose que A n'est ni minoré, ni majoré. Montrer que $A = \mathbb{R}$.*

   Il est clair que $A \subseteq \mathbb{R}$. Soit donc $x \in \mathbb{R}$. Alors x n'est ni un minornant, ni un majorant de A : il existe $y_1, y_2 \in A$ tels que $y_1 < x$ et $y_2 > x$. On conclut à nouveau par convexité.

6. *Faire la liste de tous les cas qu'il faudrait envisager pour finir la preuve (n'énoncer que les résultats, sans preuve).* Pour terminer, il faudrait traiter les cas suivants :

   - A borné, $\sup A \in A$ et $\inf A \notin A$: $A =]\inf A, \sup A]$
   - A borné, $\sup A \notin A$ et $\inf A \in A$: $A = [\inf A, \sup A[$
   - A minoré mais pas majoré, avec $\inf A \in A$: $A = [\inf A, \infty[$
   - A minoré mais pas majoré, avec $\inf A \notin A$: $A =]\inf A, \infty[$
   - A majoré mais pas minoré, avec $\sup A \in A$: $A =]-\infty, \sup A]$
   - A majoré mais pas minoré, avec $\sup A \notin A$: $A =]-\infty, \sup A[$

Exercice 2. Des équations fonctionnelles

Partie A. Une fonction sur les entiers

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante, vérifiant

$$f(2) = 2 \textit{ et } \forall p, q \in \mathbb{N},\ f(pq) = f(p)f(q).$$

Montrer par récurrence forte que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n.$$

Indication : Pour l'hérédité, on pourra distinguer les cas n pair et n impair.

Soit P_n la propriété "$f(n) = n$".

- On a $f(0) = f(2)f(0)$, et donc si $f(0) \neq 0$, on aurait $f(2) = 1$, ce qui est impossible.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $f(k) = k$ pour tout $k < n$. Montrons $f(n) = n$.
  - Si n est pair, on a

$$\begin{aligned} f(n) &= f\left(n\frac{n}{2}\right) \\ &= f(2)f\left(\frac{n}{2}\right) \\ &= 2\frac{n}{2} \text{ par hypothèse} \\ &= n \end{aligned}$$

  - Si n est impair, alors on peut montrer comme dans le cas pair que $f(n+1) = n+1$. Mais par croissance stricte,

$$f(n-1) < f(n) < f(n+1),$$

    et donc

$$n - 1 < f(n) < n + 1.$$

    Nécessairement, $f(n) = n$.

Par théorème de récurrence forte, $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n$.

Partie B. Une fonction sur les réels

On cherche les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ et } f(xy) = f(x)f(y).$$

1. *Montrer que la fonction nulle (*i.e. *la fonction telle que* $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$*) est solution.*
   Il suffit de le vérifier.

On suppose donc maintenant que la fonction est non nulle.

2. *Écrire la formule logique correspondant à "f est non nulle".*
   Cela correspond à
   $$\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0.$$
3. *Montrer que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.*
   Indication : Pour ce dernier, on pourra utiliser la question précédente.
   On a $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$, et donc $f(0) = 0$.
   Soit y un réel tel que $f(y) \neq 0$. Alors $f(y) = f(1)f(y)$, et en divisant par $f(y)$ on obtient $f(1) = 1$.
4. *En déduire que*
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n,$$
   puis que
   $$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N}^*,\ f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{f(p)}{f(q)}.$$
   Une récurrence immédiate prouve bien que $f(n) = n$. Si $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, alors
   $$\begin{aligned} f(p) &= f\left(q\frac{p}{q}\right) \\ &= f(q)f\left(\frac{p}{q}\right) \end{aligned}$$
   On retrouve le résultat voulu.
5. *Montrer que* $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Alors $f(x) = f(\sqrt{x}^2) = f(\sqrt{x})^2 \geqslant 0$.
6. *Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.*
   Indication : Pour $x \leqslant y$, on pourra écrire $y = x + y - x$.
   Soient donc $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leqslant y$, Alors $f(y) = f(x) + f(y-x) \geqslant f(x)$ car $y - x \geqslant 0$.
   Donc f est croissante.
7. *Montrer que pour tout réel x,*
   $$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$
   On a par définition $\lfloor x \rfloor \leqslant x$ et $x < \lfloor x \rfloor + 1$ donc $x - 1 < \lfloor x \rfloor$.
8. *En déduire que pour tous $x \in \mathbb{R}$,*
   $$\lim_{n \to \infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x.$$
   On a donc pour tout n
   $$\frac{nx-1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant \frac{nx}{n}.$$
   Par théorème d'encadrement des limites, on a le résultat voulu.

9. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que*
$$\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant f(x) < \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}.$$
On a par définition de partie entière et croissance de f
$$f(\lfloor nx \rfloor) \leqslant f(nx) < f\left(\lfloor nx \rfloor + 1\right),$$
et donc
$$\lfloor nx \rfloor \leqslant nf(x) < \lfloor nx \rfloor + 1.$$
Il suffit de diviser par n pour trouver le résultat.

10. *Conclure : quelles sont toutes les fonctions vérifiant les conditions ?* En passant à la limite, on obtient donc $x \leqslant f(x) \leqslant x$, et donc $f(x) = x$.

    Pour conclure, les deux seules fonctions répondant aux critères sont donc la fonction nulle et l'identité.

Exercice 3. La fonction d'Ackermann

Pour chaque entier n, on note ξ_n la fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par
$$\begin{cases} \xi_0(x) = 2^x \\ \xi_n(0) = 1 \\ \xi_n(x+1) = \xi_{n-1}(\xi_n(x)) \end{cases}$$

1. *Calculer $\xi_0(2)$, $\xi_1(2)$ et $\xi_2(2)$.*
   On a $\xi_0(2) = 2^2 = 4$.
   On a donc
$$\begin{aligned} \xi_1(2) &= \xi_0(\xi_1(1)) \\ &= \xi_0(\xi_0(\xi_1(0))) \\ &= \xi_0(\xi_0(1)) \\ &= \xi_0(2) \\ &= 2^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$
   et
$$\begin{aligned} \xi_2(2) &= \xi_1(\xi_2(1)) \\ &= \xi_1(\xi_1(\xi_2(0))) \\ &= \xi_1(\xi_1(1)) \\ &= \xi_1(2) \\ &= \xi_0(\xi_1(1)) \\ &= \xi_0(2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

2. Montrer que pour tous entiers n et x, on a
$$\xi_n(x) > x.$$
   Indication : On pourra montrer par récurrence sur n la propriété P_n : $\forall x \in \mathbb{N}$, $\xi_n(x) > x$, et ne pas hésiter à faire une récurrence sur x pour l'hérédité. Montrons-le par récurrence sur n.
   Soit donc P_n la proposition "Pour tout entier x, $\xi_n(x) > x$".
   - Il est assez clair que P_0.
   - Soit n un entier. Supposons P_{n-1}, et montrons P_n. Pour cela, faisons une récurrence sur x.
     Soit donc Q_x la proposition "$\xi_n(x) > x$ ".
     - Q_0 est toujours clair.

– Soit x un entier. Supposons Q_{x-1} et montrons Q_x.
On a par définition $\xi_n(x) = \xi_{n-1}(\xi_n(x-1))$, et donc, par P_{n-1} on a $\xi_n(x) > \xi_n(x-1)$, c'est-à-dire

$$\xi_n(x) \geqslant \xi_n(x-1) + 1.$$

D'après Q_{x-1}, $\xi_n(x-1) > x-1$, d'où Q_x

On a donc Q_n.

Donc, par récurrence, on a le résultat.

3. *En déduire que pour tout n, ξ_n est strictement croissante,* i.e. *que*

$$\forall x \in \mathbb{N},\ \xi_n(x+1) > \xi_n(x).$$

ξ_0 est clairement croissante. Si $n \geqslant 1$, alors

$$\forall x \in \mathbb{N},\ \xi_n(x+1) = \xi_{n-1}(\xi_n(x)) > \xi_n(x)$$

d'après la question précédente.

4. *Montrer que pour tous entiers n et x, on a*

$$\xi_{n+1}(x) \geqslant \xi_n(x).$$

Par récurrence sur x :

- Pour $x = 0$, c'est évident.
- Supposons $\xi_{n+1}(x) \geqslant \xi_n(x)$. Alors on sait que

$$\xi_{n+1}(x) \geqslant x + 1,$$

et donc comme ξ_n est croissante, on a

$$\xi_n(\xi_{n+1}(x)) \geqslant \xi_n(x+1).$$

Cela nous donne donc

$$\xi_{n+1}(x+1) \geqslant \xi_n(x+1),$$

ce qui conclut la récurrence.