Devoir surveillé 2

Angers Le Fresne : BCPST 1

13 Octobre 2018

Exercice 1. Une inégalité réelle

1. Il y a donc $\binom{13}{2} = \frac{13\times 12}{2} = 78$ façons d'en choisir deux parmi les treize.
2. Les x_i sont par ordre croissant, et la fonction arctan est strictement croissante, donc les θ_i sont aussi par ordre strictement croissant, et sont donc distincts deux à deux. De plus,la fonction arctan étant à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, les θ_i y sont forcément.
3. Supposons le contraire, *i.e.* pour tout k,
$$\theta_{k+1} - \theta_k \leqslant 0 \text{ ou } \theta_{k+1} - \theta_k \geqslant \frac{\pi}{12}.$$
Les θ_i étant par ordre strictement croissant, le premier cas est impossible.
Sommons pour tout k :
$$\sum_{k=0}^{12} (\theta_{k+1} - \theta_k) \geqslant \frac{13\pi}{12},$$
et par télescopage
$$\theta_{13} - \theta_0 \geqslant \frac{13\pi}{12}.$$
D'un autre côté,
$$|\theta_{13} - \theta_0| \leqslant |\theta_{13}| + |\theta_0| \leqslant \pi.$$
D'où une contradiction.
4. On a donc
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{3}} &= \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ &= \tan\left(2\frac{\pi}{12}\right)\\ &= \frac{2\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)}{1-\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)^2}\end{aligned}$$
Finalement, en notant α la valeur cherchée, on a bien $1 - \alpha^2 = 2\sqrt{3}\alpha$, soit
$$\alpha^2 + 2\sqrt{3}\alpha - 1 = 0.$$
On trouve alors les solutions $-2-\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$. La valeur cherchée étant positive, on a donc $\alpha = 2 - \sqrt{3}$.
5. Soit k l'entier de la question 3. La fonction tan est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, et donc
$$\tan 0 < \tan(\theta_{k+1} - \theta_k) < \tan\left(\frac{\pi}{12}\right),$$
c'est-à-dire
$$0 < \frac{x_{k+1} - x_k}{1 + x_{k+1}x_k} < 2 - \sqrt{3}.$$
6. On peut écrire le code suivant :

```
k=1
x=f(k)
y=f(k+1)
while ((x-y)/(1+x*y) >= 2-3**.5 and k<13):
    k=k+1
    x=f(k)
    y=f(k+1)
print(x,y)
```

Exercice 2. Encore des sommes

1. On note que si $j = 0$ ou $j = n$, on a bien $\omega^j = 1$. Réciproquement, on a

$$\omega^j = 1 \Leftrightarrow \frac{2j\pi}{n} = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

et donc comme la fraction est entre 0 et 2π,

$$\omega^j = 1 \Leftrightarrow \frac{2j\pi}{n} = 0 \text{ ou } 2\pi.$$

Le premier cas donne $j = 0$, le second $j = n$.

2. Faisons à part les cas $j = 0$ et $j = n$. Dans ce cas, tous les termes de la somme font 1, et donc la somme vaut n.
Supposons maintenant que $j \in \{1, \dots, n-1.\}$. Alors $\omega_j \neq 1$, et on peut appliquer la formule de la somme des termes d'une suite géométrique.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega^j\right)^k &= \frac{1-\omega^{nj}}{1-\omega^j}\\ &= 0\end{aligned}$$

car $\omega^n = 1$.

3. On applique la formule de Newton :

$$\left(z + e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\omega^{jk}z^{n-k}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\left(z + e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\omega^{jk}z^{n-j}\\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{j}\omega^{jk}z^{n-k}\\ &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}z^{n-j}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{jk}\\ &= z^n n + n\\ &= n(z^n+1)\end{aligned}$$

4. (a) On factorise l'angle moitié :

$$\begin{aligned}1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}} &= e^{0i} + e^{\frac{2ik\pi}{n}}\\ &= e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{-\frac{ik\pi}{n}} + e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)\\ &= 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{\frac{ik\pi}{n}}\end{aligned}$$

(b) On applique la formule $(\star)$ pour $z = 1$.

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n = 2n.$$

D'un autre côté, avec la question précédente

$$\left(1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n = 2^n \cos^n\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{ik\pi} = (-1)^k 2^n \cos^n\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Finalement, la somme désirée vaut $\frac{2n}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}$.

5. (a) Comme précédemment, on utilise la méthode de l'angle moitié.
   (b) On applique la formule pour $z = e^{i\pi/n}$:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\pi/n}+e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n = n(e^{i\pi}+1) = 0.$$

D'un autre côté, avec la question précédente,

$$\left(e^{i\pi/n}+e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n = 2^n\cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2}} = (-1)^k i 2^n \cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right).$$

La somme cherchée vaut donc 0.

Exercice 3. Une inégalité triangulaire

1. Pour tot $z \in \mathbb{C}$, on a $|z| \geqslant 0$, et donc $1+|z| \neq 0$. La fonction g est donc bien définie.
   Une simple mise au même dénominateur permet d'obtenir le résultat.
2. Soient $u, v \in \mathbb{C}$. Alors $|u+v| \leqslant |u|+|v|$ par l'inégalité triangulaire, et donc $|u+v|+1 \leqslant |u|+|v|+1$.
   Par décroissance de la fonction inverse, on a donc

$$\frac{1}{|u+v|+1} \geqslant \frac{1}{|u|+|v|+1},$$

puis

$$1-\frac{1}{|u+v|+1} \leqslant 1-\frac{1}{|u|+|v|+1} = \frac{|u|+|v|}{1+|u|+|v|}.$$

Or

$$\frac{|u|+|v|}{1+|u|+|v|} = \frac{|u|}{1+|u|+|v|}+\frac{|v|}{1+|u|+|v|} \leqslant \frac{|u|}{1+|u|}+\frac{|v|}{1+|v|} = g(u)+g(v).$$

Finalement, on a bien

$$g(u+v) \leqslant g(u)+g(v).$$

3. Par récurrence immédiate, on a donc

$$g\left(\sum_{k=1}^n |z_k|\right) \leqslant \sum_{k=1}^n g(|z_k|),$$

et il suffit de noter que $g(|z_k|) = g(z_k)$.

4. Posons

$$A = \left|\sum_{k=1}^n z_k\right| \text{ et } B = \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

Par inégalité triangulaire, on a donc $A \leqslant B$. Donc

$$\frac{1}{1+A} \geqslant \frac{1}{1+B},$$

puis

$$g(A) \leqslant g(B).$$

5. On a donc, avec les questions précédentes,

$$g(A) \leqslant g(B) \leqslant \sum_{k=1}^n g(z_k) = \sum_{k=1}^n \frac{|z_k|}{1+|z_k|}.$$