Devoir surveillé 4

Angers Le Fresne : BCPST 1

10 Décembre 2018

Dans ce devoir, la clarté et la précision du raisonnement seront primordiales. Les résultats seront encadrés, les pages numérotées, *etc.*

Aucun document n'est autorisé. Calculatrice interdite.

Si vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez le sujet.

Exercice 1. Exercice : Matrices pseudo-inversibles

1. (a) D'un côté, on a $AB_1AB_2 = AB_2$, et d'un autre côté, par commutation, $AB_1AB_2 = B_1AB_2A = B_1A = AB_1$. Donc $AB_1 = AB_2$.

   (b) En multipliant l'égalité $AB_1 = B_2A$ à gauche par B_1 on a donc $B_1 = B_2AB_1 = B_2AB_2 = B_2$.

2. (a) Montrons que le pseudo-inverse est $\mathbf{0}_n$: il est clair que $\mathbf{0}_n$ commute avec elle-même, et les autres conditions sont trivialement vérifiées.

   (b) Si M est inversible, alors $M^* = M^{-1}$ convient.

   (c) i. Soit $k \geqslant 2$. Alors

$$\begin{aligned} N^*N^k &= N^*NNN^{k-2} \\ &= NN^*NN^{k-2} \\ &= NN^{k-2} \\ &= N^{k-1} \end{aligned}$$

   ii. Supposons que $p \geqslant 2$. Alors $N^*N^p = N^{p-1}$, et donc $\mathbf{0}_n = N^{p-1}$, ce qui contredit la minimalité de p. Donc $p = 1$.

   iii. Calculons N^2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   La matrice N est donc nilpotente. Comme elle est non nulle, elle n'est donc pas pseudo-inversible.

3. (a) Soit $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ une matrice diagonale. Posons $D' = \mathrm{diag}(e_1, ldots, e_n)$ où

$$e_i = \begin{cases} \dfrac{1}{d_i} & \text{si } d_i \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

   Alors pour tout i, $d_ie_id_i = \begin{cases} 0 & \text{si } d_i = 0 \\ d_i & \text{sinon} \end{cases}$ et $e_id_ie_i = \begin{cases} 0 & \text{si } d_i = 0 \\ e_i & \text{sinon} \end{cases}$.

   Les deux matrices étant diagonales, leurs produits se font coefficients par coefficients, et donc D' est bien le pseudo-inverse de D.

(b) Soit $B = P^{-1}A^*P$. Alors

$$\begin{aligned}
A'B &= P^{-1}APP^{-1}A^*P \\
&= P^{-1}AA^*P \\
&= P^{-1}A^*AP \\
&= BA' \\
A'BA' &= P^{-1}APP^{-1}A^*PP^{-1}AP \\
&= P^{-1}AA^*AP \\
&= P^{-1}AP \\
&= A' \\
BA'B &= P^{-1}A^*PP^{-1}APP^{-1}A^*P \\
&= P^{-1}A^*AA^*P \\
&= P^{-1}A^*P \\
&= B
\end{aligned}$$

Donc A' est pseudo-inversible, de pseudo-inverse $P^{-1}A^*P$.

(c) i. On utilise la méthode de Gauss pour inverser P :

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
\to &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
\to &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \\
\to &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \\
\to &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)
\end{aligned}$$

P est donc inversible, et

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $(0,0,0)$ et $(1,-1,0)$ sont solutions du système $AX = \mathbf{0}_{n,1}$, qui n'admet donc pas une unique solution. A n'est donc pas inversible.

ii. Commençons par calculer

$$P^{-1}A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puis

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

iii. D'après la question 3a, la matrice diagonale admet pour pseudo-inverse

$$D^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, $A = PDP^{-1}$, et donc d'après la question 3b, A est pseudo-inversible d'inverse $A^* = PD^*P^{-1}$. On calcule :

$$PD^*P^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Exercice : Développement asymptotique d'une suite

1. (a) Posons pour tout $x > 0$ $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Alors f est dérivable, et pour tout $x > 0$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

La fonction f est donc croissante sur $]0, e]$ et décroissante sur $[e, \infty[$.
On note en particulier qu'elle est décroissante sur $[3, \infty[$.

(b) Soit $k \geqslant 4$. Alors pour tout $x \in [k, k+1]$, on a par la question précédente

$$\frac{\ln x}{x} \leqslant \frac{\ln k}{k},$$

et par croissance de l'intégrale,

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\ln k}{k} \mathrm{d}x = \frac{\ln k}{k}.$$

De même, pour tout $x \in [k-1, k]$, $\frac{\ln x}{x} \geqslant \frac{\ln k}{k}$, et le même argument permet de montrer l'inégalité de droite.

(c) En sommant les inégalités de la question précédente, on a donc par relation de Chasles

$$\int_4^{n+1} \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x \leqslant S_n - \left(\frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3}\right) \leqslant \int_3^n \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x.$$

Une primitive de $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est $\frac{1}{2}\ln^2(x)$, et on trouve donc

$$\frac{1}{2}\ln^2(n+1) - \frac{1}{2}\ln^2(4) \leqslant S_n - \left(\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3}\right) \leqslant \frac{1}{2}\ln^2(n) - \frac{1}{2}\ln^2(3).$$

(d) Par minoration, la suite $(\frac{1}{2}\ln^2(n+1) - A)$ tendant vers $+\infty$, la suite $(S_n - B)$ tend vers $+\infty$, et donc (S_n) aussi.

(e) On peut écrire le code suivant :

```
from math import *

def foo(r):
  n=1
  S=0
  while (S < r):
    n+=1
    S=S+log(n)/n
  return(n)
```

2. (a) Commençons par noter que pour tout n,

$$\ln^2(n+1) = \ln^2\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \left(\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^2.$$

On a donc

$$\frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2(n)} = \left(1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)^2 \to 1.$$

On a donc bien l'équivalent demandé.

(b) On a donc, d'après 1c,

$$\frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2(n)} - \frac{2(B-A)}{\ln^2(n)} \leqslant \frac{2S_n}{\ln^2(n)} \leqslant 1 - \frac{2(B-C)}{\ln^2(n)}.$$

Par la question précédente et théoreme d'encadrement, le rapport $\frac{2S_n}{\ln^2(n)}$ tend vers 1, et on a donc bien l'équivalent demandé.

3. (a) Soit $n \geqslant 3$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= S_{n+1} - S_n - \frac{1}{2}\ln^2(n+1) + \frac{1}{2}\ln^2(n)) \\ &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{1}{2}\ln^2(n+1) + \frac{1}{2}\ln^2(n)) \end{aligned}$$

Or on a vu en 1b que pour $k \geqslant 4$

$$\frac{\ln k}{k} \leqslant \frac{1}{2}\ln^2(k) - \frac{1}{2}\ln^2(k-1).$$

Pour $k = n+1 \geqslant 4$, on a donc

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{1}{2}\ln^2(n+1) \leqslant -\frac{1}{2}\ln^2(n),$$

et il suffit d'ajouter $\frac{1}{2}\ln^2(n)$ pour avoir l'inégalité voulue.

(b) On a pour tout $n \geqslant 4$

$$\begin{aligned} u_n &= S_n - \frac{1}{2}\ln^2(n) \\ &\geqslant S_n - \frac{1}{2}\ln^2(n+1) \\ &\geqslant B - A \end{aligned}$$

d'après la question 1c.

Finalement, (u_n) est décroissante et minorée, et donc converge.

4. (a) On montre les deux inégalités :
   - Soit $f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \ln(1+x) - x$. Alors f est dérivable, et pour tout x $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$. La fonction f est donc décroissante, et comme $f(0) = 0$, elle est négative.
   - Soit $g : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$. Alors g est dérivable, et pour tout x $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x}$. La fonction g est donc croissante, et comme $g(0) = 0$, elle est positive.

(b) Calculons :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(1 + \frac{1}{n}) \\ &\leqslant \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \\ &= \frac{2n^2 - 2n(n+1) + (n+1)}{2(n+1)n^2} \\ &= \frac{-n+1}{2(n+1)n^2} \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$

Donc (u_n) est décroissante.

De même

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n+2) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(1 + \frac{1}{n+1}) \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Donc (v_n) est croissante.

(c) La différence des deux donne

$$u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln(1 + \frac{1}{n}) \to 0.$$

Les deux suites sont donc adjacentes, et convergent donc toutes les deux vers une même limite.

5. (a) Montrons-le par récurrence.
   - Pour $n = 1$,

$$A_2 = \frac{\ln 1}{1} - \frac{\ln 2}{2},$$

   et

$$S_2 - S_1 - \ln(2) = \frac{\ln 2}{2} - \ln(2) = -\frac{\ln 2}{2}.$$

   - Supposons la propriété vraie au rang n. Alors

$$\begin{aligned} A_{2n+2} &= A_{2n} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} - \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} \\ &= S_{2n} - S_n - \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} - \frac{\ln(2) + \ln(n+1)}{2(n+1)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
S_{2n+2} - S_{n+1} &= S_{2n} - S_n + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} + \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} - \frac{\ln(n+1)}{n+1} \\
&= A_{2n} + \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} + \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} - \frac{\ln(n+1)}{n+1} \\
&= A_{2n+2} + 2\frac{\ln(2n+2)}{2n+2} + \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{\ln(n+1)}{n+1} \\
&= A_{2n+2} + \frac{\ln(2)+\ln(n+1)}{n+1} + \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{\ln(n+1)}{n+1} \\
&= A_{2n+2} + \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Finalement, par récurrence, on a bien l'égalité voulue.

6. (a) On a donc

$$\begin{aligned}
A_{2n} &= S_{2n} - S_n - \ln(2)(\ln(n) + \gamma + \varepsilon_n) \\
&= u_{2n} + \frac{\ln^2(2n)}{2} - u_n - \frac{\ln^2(n)}{2} - \ln(2)\ln(n) - \ln(2)\gamma - \ln(2)\varepsilon_n \\
&= u_{2n} - u_n - \frac{1}{2}\ln^2(n) + \frac{1}{2}(\ln^2(2) + 2\ln(2)\ln(n) + \ln^2(n)) - ln(2)\ln(n) - \ln(2)\gamma - \ln(2)\varepsilon_n \\
&= u_{2n} - u_n + \frac{1}{2}\ln^2(2) - \ln(2)\gamma - \ln(2)\varepsilon_n
\end{aligned}$$

Or $u_{2n} - u_n \to 0$, , et $\varepsilon_n \to 0$, donc

$$A_{2n} \to \ln(2)\left(\frac{1}{2}\ln(2) - \gamma\right).$$

(b) On a

$$A_{2n+1} = A_{2n} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1}.$$

Par croissances comparées, le second terme tend vers 0, et on a déjà calculé la limite du premier, donc

$$A_{2n+1} \to \ln(2)\left(\frac{1}{2}\ln(2) - \gamma\right).$$

(c) Les deux suites (A_{2n}) et (A_{2n+1}) convergeant vers la même limite, la suite (A_n) aussi.