Devoir surveillé 5

Angers Le Fresne : BCPST 1

2 Février 2019

Dans ce devoir, la clarté et la précision du raisonnement seront primordiales. Les résultats seront encadrés, les pages numérotées, *etc.*

Aucun document n'est autorisé. Calculatrice interdite.

Si vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez le sujet.

Exercice 1. Polynômes de Hilbert

Partie A. Résultat préliminaire

Commençons par une définition :

DÉFINITION

Soit $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{R}[X]$. On dit que la famille $(P_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ est *échelonnée* si pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $\deg(P_i) = i$.

On veut montrer que si on a une telle famille, alors tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ peut s'écrire sous la forme

$$P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que le résultat est vrai si $n = 0$.
2. On suppose le résultat vrai pour toute famille de n polynômes échelonnée.
   Soit $(P_0, \dots, P_n, P_{n+1})$ une famille échelonnée.
   (a) $(\star)$ Montrer qu'il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$ tels que
   $$X^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k P_k.$$
   (b) En déduire que tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ peut s'écrire
   $$P = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i P_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$
3. Conclure.

Partie B. Polynômes de Hilbert

On définit les polynômes de Hilbert H_n en posant

$$H_0 = 1 \text{ et } H_n = \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer le degré de H_n.
5. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$.
   (a) Montrer que si $k \in [\![0, n-1]\!]$, alors $H_n(k) = 0$.
   (b) Montrer que si $k \geqslant n$, alors $H_n(k) = \binom{k}{n}$.
   (c) Montrer que si $k < 0$, alors $H_n(k) = (-1)^n \binom{n-k-1}{n}$.

6. Montrer que si P est un polynôme à coefficients entiers, alors $\forall k \in \mathbb{Z},\ P(k) \in \mathbb{Z}$. La réciproque est-elle vraie ?

Le reste de l'exercice va consister à montrer l'équivalence entre les trois assertions suivantes, pour $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n :

(i) $P(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$, c'est-à-dire $\forall k \in \mathbb{Z},\ P(k) \in \mathbb{Z}$

(ii) $\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(k) \in \mathbb{Z}$

(iii) il existe $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Z}$ tels que

$$P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k H_k.$$

7. Montrer que (i) $\Rightarrow$ (ii).
8. Montrer que (iii) $\Rightarrow$ (i).
9. Il reste à montrer que (ii) $\Rightarrow$ (iii). Soit donc $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(k) \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
   (a) Montrer qu'il existe $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que
   $$P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k H_k.$$
   (b) Montrer par récurrence que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\lambda_k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2. Somme des carrés des inverses

Le but de cet exercice est de (re)calculer la valeur de

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Partie A. Python

1. Écrire une fonction Python prenant un entier n en paramètre et renvoyant la liste
$$\left[\frac{1}{1^2}, \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{1^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right],$$
i.e. la liste dont le k-ième coefficient est $\sum_{\ell=1}^{k} \frac{1}{\ell^2}$.

Partie B. Étude de la fonction cotangente

On notera pour tout $t \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$$\operatorname{cotan}(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}.$$

2. Montrer que pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,
$$1 + \operatorname{cotan}^2(t) = \frac{1}{\sin^2(t)}.$$
3. Montrer que pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,
$$\sin(t) \leqslant t \leqslant \tan(t).$$
4. En déduire que pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,
$$\operatorname{cotan}^2(t) \leqslant \frac{1}{t^2} \leqslant 1 + \operatorname{cotan}^2(t).$$

Partie C. Calcul de la somme

5. ($\star\star$) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \left]0 \frac{\pi}{2}\right[$. En utilisant la formule de Moivre, montrer que

$$\sin((2n+1)t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k \sin^{2k+1}(t) \cos^{2(n-k)}(t).$$

6. ($\star$) En déduire qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \ P_n(\operatorname{cotan}^2(t)) = \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin^{2n+1}(t)}.$$

   On explicitera les coefficients de P.

7. Quels sont les degré et coefficient dominant de P_n ?

8. Donner toutes les racines de P_n, ainsi que leurs multiplicités.
   Indication : on pourra chercher les racines sous la forme $\operatorname{cotan}(t)$*, en utilisant la question 6.*

9. Montrer que la somme des racines de P_n, comptées avec multiplicité, est égale à $\frac{1}{3}n(2n-1)$.

10. En utilisant la question 4, montrer que

$$\frac{n(2n-1)}{3} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n+1)^2}{\pi^2 k^2} \leqslant n + \frac{n(2n-1)}{3}.$$

11. En déduire que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, et calculer sa limite.