Devoir surveillé 6

Angers Le Fresne : BCPST 1

16 Mars 2019

Dans ce devoir, la clarté et la précision du raisonnement seront primordiales. Les résultats seront encadrés, les pages numérotées, *etc.*

Aucun document n'est autorisé. Calculatrice interdite.

Si vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez le sujet.

Paradoxe de Parrondo

Dans cet exercice, on va étudier deux jeux de "pile ou face", nommés A et B, ainsi qu'une combinaison des deux.

Dans les deux jeux, on gagne un point si on obtient "Pile", et on perd un point pour "Face".

On notera C_n le nombre de points à l'issue de la n-ième partie. On commence avec $C_0 = 0$.

On dira qu'une suite de matrices $A_n = (a_{ij,n})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ converge si chacune des suites $(a_{ij,n})_n$ converge, et sa limite sera alors $A_\infty = (\lim\limits_{n\to\infty} a_{ij,n})$.

Par exmple, la suite de matrices $\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{n} & 1 \\ \frac{\ln(n)}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$ converge vers la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On admet que si une suite de matrices (A_n) converge vers A_∞, et que C et D sont des matrices de tailles compatibles, alors les suites (A_nC) et (DA_n) convergent respectivement vers $A_\infty C$ et DA_∞.

Partie A. Préliminaires

1. Soit A une matrice diagonale. Donner une condition nécessaire et suffisante sur ses coefficients pour que la suite (A^n) converge.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On dit que A est *stochastique* si la somme de chaque colonne vaut 1.
   Montrer qu'une matrice A est stochastique si et seulement si $(1\ 1\ 1)A = (1\ 1\ 1)$.
   En déduire que le produit de deux matrices stochastiques est stochastique.
3. Montrer que si une suite de matrices stochastiques converge, alors sa limite est stochastique.

Partie B. Jeu A

Dans ce jeu, on lance une pièce truquée. La probabilité qu'elle donne "Pile" est $p = \frac{1}{2} - \varepsilon$ où $\varepsilon = \frac{1}{100}$.

On note G_A la variable aléatoire égale au gain pour une partie du jeu A.

4. Donner la loi de G_A, puis son espérance et sa variance.
5. Le jeu A est-il favorable ou défavorable pour le joueur ?
6. Écrire une fonction Python `jeuA` prenant un entier N en paramètre, et qui renvoie la valeur de $\frac{C_N}{N}$ en simulant le jeu A.

Partie C. Jeu B

Ce jeu est plus compliqué. On dispose de deux pièces P_1 et P_2, donnant "Pile" avec probabilités respectives $p_1 = \frac{3}{4} - \varepsilon$ et $p_2 = \frac{1}{10} - \varepsilon$. Les règles sont les suivantes :

- si le joueur a un nombre de points multiple de 3 avant de lancer la pièce, il lance la pièce P_2
- sinon, il lance la pièce P_1.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de point modulo 3 (c'est-à-dire le reste dans la division par 3) à l'issue de la n-ième partie.

On notera $Y_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \end{pmatrix}$.

7. Donner la valeur de Y_0.
8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+1} = BY_n$ où $B = \begin{pmatrix} 0 & 1-p_1 & p1 \\ p_2 & 0 & 1-p_1 \\ 1-p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix}$.
9. Donner une expression de Y_n en fonction de B et de n.

On *admet* qu'il existe une matrice P inversible, de première colonne $\begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p_1(1-p_1) \\ 1-p_1(1-p_2) \\ 1-p_2(1-p_1) \end{pmatrix}$ et deux réels λ_1, λ_2 dans $]-1,1[$ tels que

$$B = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

10. Montrer que la suite $(B^n)_n$ converge vers la matrice

$$B_\infty = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

11. Montrer alors qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$B_\infty = \begin{pmatrix} a\mu_0 & b\mu_0 & c\mu_0 \\ a\mu_1 & b\mu_1 & c\mu_1 \\ a\mu_2 & b\mu_2 & c\mu_2 \end{pmatrix}.$$

12. En utilisant le préliminaire, montrer que $a = b = c = \frac{1}{\mu}$, où $\mu = \mu_0 + \mu_1 + \mu_2$ (on vérifiera que $\mu \neq 0$).
13. Montrer que la suite de matrices (Y_n) converge, vers la matrice $Y_\infty = \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$.

Soit X_∞ la variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$ de loi $\mathbb{P}(X_\infty = i) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n = i)$. On va regarder des parties de B "à l'infini", c'est-à-dire :

- on tire un nombre parmi $0, 1, 2$ au hasard, suivant la loi donnée par X_∞.
- si on obtient 0, on joue avec la pièce P_2
- sinon, on joue avec la pièce P_1

14. Montrer que l'espérance de gain pour un coup "à l'infini" est donnée par

$$\mathbb{E}(G_B) = (2p_2 - 1)\mathbb{P}(X_\infty = 0) + (2p_1 - 1)(\mathbb{P}(X_\infty = 1) + \mathbb{P}(X_\infty = 2)).$$

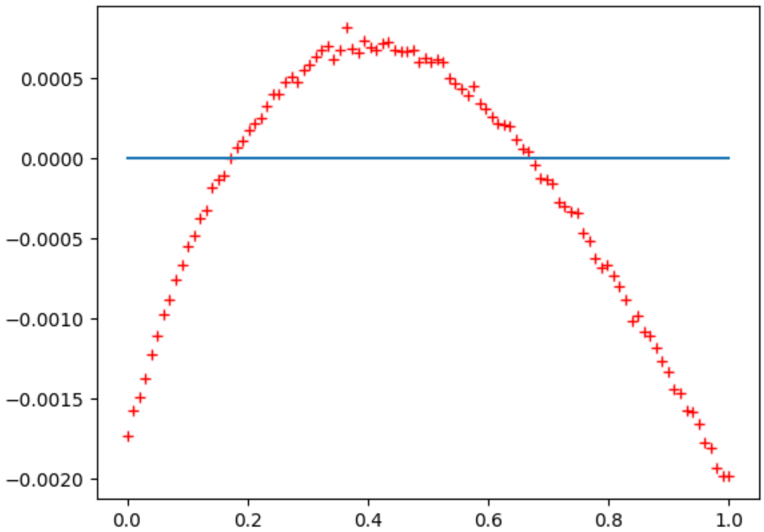
15. Donner une expression de cette espérance seulement en fonction de p_1 et p_2.
16. On trouve numériquement $\mathbb{E}(G_B) \simeq -0.0174$. Le jeu B est-il favorable ou défavorable au joueur ?
17. Écrire une fonction Python `jeuB` prenant en paramètre un entier N, et renvoyant la valeur de $\frac{C_N}{N}$ en simulant le jeu A.

Partie D. Mélange des jeux A et B

Maintenant, avant chaque coup, on lance un dé truqué : il donne un résultat pair avec probabilité $a \in [0, 1]$. Si on obtient un résultat pair, on joue au jeu A, et si on obtient un résultat impair, on joue au jeu B.

18. Écrire une fonction Python `jeuAB` prenant en paramètres un entier N et un réel $a \in [0, 1]$, et renvoyant la valeur de $\frac{C_N}{N}$ en simulant le mélange des jeux A et B.

19. Un grand nombre de simulations donne un gain moyen représenté sur cette figure (en abscisses, les valeurs de a, et en ordonnées, les gains moyens).



Écrire une fonction Python qui pourrait tracer ce graphe.

20. Commenter ce graphe. On justifiera en particulier le terme de "paradoxe".