Devoir surveillé 6 : Corrigé

Angers Le Fresne : BCPST 1

16 Mars 2019

Paradoxe de Parrondo

1. On note a_i les coefficients diagonaux de A.
   On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$A^n = \text{diag}(a_1^n, \ldots, a_p^n).$$
   Alors (A^n) converge si et seulement si les suites (a_i^q) convergent, *i.e.* si et seulement si pour tout i, $a_i \in]-1, 1]$.
2. C'est clair par produit matriciel. Si A et B sont stochastiques, on a alors
   $$(1\ 1\ 1)AB = (1\ 1\ 1)B = (1\ 1\ 1),$$
   et donc AB est stochastique.
3. Soit A_n une suite de matrices qui converge. Notons u_n, v_n et w_n les coefficients d'une des colonnes de A_n.
   On a alors $u_n \to u$, $v_n \to v$ et $w_n \to w$. Comme A_n est stochastique, on a donc $u_n + v_n + w_n = 1$.
   Il suffit de passer à la limite pour obtenir $u + v + w = 1$, et donc la matrice A_∞ est stochastique.
4. On a $\mathbb{P}(G_A = 1) = p$ et $\mathbb{P}(G_A = -1) = 1 - p$. L'espérance est donc $\mathbb{E}(G_A) = 2p - 1 = -0.02$.
   On a de plus clairement $\mathbb{E}(G_A^2) = 1$ (G_A^2 est une variable certaine), et donc la variance est $\mathbb{V}(G_A) = 1 - (2p-1)^2 = 0.96$.
5. Le jeu est donc défavorable pour le joueur.
6.
```
def jeuA(N):
    p = 0.49
    C = 0
    for _ in range(N):
        if random() <= p:
            C+=1
        else:
            C-=1
    return C
```
   Ce programme donne bien une espérance empirique proche de -0.02.
7. On a donc $Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
8. On veut calculer $\mathbb{P}(X_{n+1} = i)$. Six cas se présentent :
   - On avait $X_n = j$ et on a perdu, pour $j = 0, 1, 2$.
   - On avait $X_n = j$ et on a gagné, pour $j = 0, 1, 2$.

   Par la formule des probabilités totales, on a
   $$\mathbb{P}(X_{n+1} = i) = \mathbb{P}_{X_n=0}(X_{n+1} = i)\mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1} = i)\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}_{X_n=2}(X_{n+1} = i)\mathbb{P}(X_n = 2).$$
   Reste à évaluer les différentes probabilités.
   - Pour $i = 0$, on avait nécessairement $X_n = 1$, et on a perdu, ou $X_n = 2$, et on a gagné. Dans les deux cas, on a joué avec P_1. D'où
   $$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = (1 - p_1)\mathbb{P}(X_n = 1) + p1\mathbb{P}(X_n = 2).$$

- Pour $i=1$, on avait nécessairement $X_n=2$ et on a perdu, ou $X_n=0$ et on a gagné. On a donc

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=1)=p_2\mathbb{P}(X_n=0)+(1-p_1)\mathbb{P}(X_n=2).$$

- De même, on obtient

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=1)=(1-p_2)2\mathbb{P}(X_n=0)+p_1\mathbb{P}(X_n=1).$$

On retrouve ainsi la relation demandée.

9. Une récurrence immédiate donne alors $Y_n=B^nY_0$.

10. Une récurrence immédiate donne pour tout n

$$B^n=PD^nP^{-1}.$$

D'après la question 1, la suite (D^n) converge, vers $\mathrm{diag}(1,0,0)$, et on a bien la limite demandée.

11. La première colonne de P étant ${}^{\mathbf{t}}(\mu_0\ \mu_1\ \mu_2)$, on a donc

$$B_\infty=\begin{pmatrix}\mu_0 & 0 & 0\\ \mu_1 & 0 & 0\\ \mu_2 & 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}.$$

Soient a,b,c les coefficients de la première ligne de P^{-1}. Alors

$$B_\infty=\begin{pmatrix}a\mu_0 & b\mu_0 & c\mu_0\\ a\mu_1 & b\mu_1 & c\mu_1\\ a\mu_2 & b\mu_2 & c\mu_2\end{pmatrix}.$$

12. Les matrices B^n sont stochastiques comme produits de matrices stochastiques, et donc B_∞ aussi. Ses colonnes ont donc toutes pour somme 1 :

$$a\mu=b\mu=c\mu=1.$$

On note que $\mu_0,\mu_1,\mu_2>0$, et donc $\mu>0$. On a donc bien $a=b=c=\frac{1}{\mu}$.

13. On a vu $Y_n=B^nY_0$, et donc (Y_n) converge, vers $B_\infty Y_0$, qui est bien la matrice demandée.

14. Par la formule des probabilités totales, on a

$$\mathbb{P}(G_B=1)=\mathbb{P}_{X_\infty=0}(G_B=1)\mathbb{P}(X_\infty=0)+\mathbb{P}_{X_\infty=1}(G_B=1)\mathbb{P}(X_\infty=1)+\mathbb{P}_{X_\infty=2}(G_B=1)\mathbb{P}(X_\infty=2).$$

On a donc

$$\mathbb{P}(G_B=1)=p_2\mathbb{P}(X_\infty=0)+p_1(\mathbb{P}(X_\infty=1)+\mathbb{P}(X_\infty=2)).$$

De même, on trouve

$$\mathbb{P}(G_B=-1)=(1-p_2)\mathbb{P}(X_\infty=0)+(1-p_1)(\mathbb{P}(X_\infty=1)+\mathbb{P}(X_\infty=2)).$$

L'espérance est donc bien celle demandée.

15. On trouve en développant

$$\mathbb{E}(G_B)=\frac{p_2p_1^2-(1-p_2)(1-p_1)^2}{3-2p_1-p_2+p_1^2+2p_1p_2}.$$

16. Le jeu est donc défavorable.

17.

```
def jeuB(N):
    C = 0
    p1 = 0.74
    p2 = 0.09
    for _ in range(N):
        if C%3 == 0:
            if random() <= p2:
                C+=1
            else:
                C-=1
        else:
            if random() <= p1:
                C+=1
            else:
                C-=1
    return C/N
```

18. On peut proposer la fonction suivante :

```
def jeuAB(N,a):
    p=0.49
    p1=0.74
    p2=0.09
    C=0
    for _ in range(N):
        if random()<=a:
            if random() <= p:
                C+=1
            else:
                C-=1
        else:
            if C%3 == 0:
                if random() <= p2:
                    C+=1
                else:
                    C-=1
            else:
                if random() <= p1:
                    C+=1
                else:
                    C-=1
    return C/N
```

19. On remarque que pour des valeurs de a proches de 0 ou 1 (*i.e.* si on joue beaucoup le même jeu), le jeu est en moyenne perdant.

    En revanche, pour des valeurs de a entre 0.2 et 0.7 environ, le jeu est en moyenne gagnant.

    Ça peut être très surprenant, puisqu'on a donc construit un jeu favorable au joueur en combinant deux jeux défavorables au joueur.