La fonction arcsinus

Définition et propriétés de la fonction A

1. Montrer que la fonction sinus réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1,1]$. On note alors A la réciproque de la fonction $\begin{array}{ccc} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$.

2. Déterminer $A\left(\frac{1}{2}\right)$ et $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

3. Tracer la graphe de la fonction A dans le plan usuel muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

4. Soit x appartenant à $[-1,1]$, montrer que $\cos(A(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

5. Montrer que la fonction A est dérivable sur $]-1,1[$ et donner l'expression de sa dérivée sous une forme simplifiée ne faisant plus intervernir de fonction trigonométrique.

6. (a) Déterminer le développement limité à l'ordre un de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t}}$.

   (b) Montrer que la fonction A admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 donné par
$$A(x) = x + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right).$$

Étude d'une suite de fonctions définies à l'aide de la fonction arcsinus

Pour tout entier n, on pose $f_n : x \mapsto \cos(2nA(x))$.

7. Calculer f_0, f_1 et f_2.
On vérifiera en particulier que pour tout entier naturel k inférieur ou égal à 2, il existe un polynôme P_k tel que : $\forall x \in [-1,1],\ f_k(x) = P_k(x)$.

8. (a) Soient a et b deux réels, exprimer $\cos(a+b) + \cos(a-b)$ uniquement en fonction de $\cos(a)$ et $\cos(b)$.

   (b) En déduire que, pour tout entier n, on a :
$$\forall x \in [-1,1],\ f_{n+2}(x) + f_n(x) = 2(1-2x^2)f_{n+1}(x).$$

9. Montrer que pour tout entier n non nul, il existe un polynôme P_n de degré $2n$ tel que
$$\forall x \in [-1,1],\ f_n(x) = P_n(x).$$

10. Soit n un entier.

    (a) Calculer f_n' et f_n''.

    (b) En déduire que f_n est solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle
$$(x^2-1)y'' + xy' - 4n^2y = 0.$$