Somme des inverses des carrés des entiers

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}.$$

2. Montrer que pour tout $t \in]0, \pi]$,

$$\sum_{n=1}^{m} \cos(nt) = \frac{\sin\left(\frac{2m+1}{2} t\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$

3. Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2/2\pi - t}{2\sin(t/2)} & \text{si } t \in]0, \pi] \\ -1 & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

   Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, \pi]$.

4. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} f(t) \sin\left(\frac{2m+1}{2} t \right) \mathrm{d}t,$$

5. En déduire que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, et calculer sa somme.

Corrigé

1. On fait deux intégrations par parties pour montrer que
$$\begin{aligned}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{n}\sin(nt)\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\right]_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \left(\frac{1}{\pi}t-1\right)\sin(nt)\mathrm{d}t\\ &= -\frac{1}{n}\int_0^\pi \left(\frac{1}{\pi}t-1\right)\sin(nt)\mathrm{d}t\\ &= -\frac{1}{n}\left(\left[-\frac{1}{n}\cos(nt)\left(\frac{1}{\pi}t-1\right)\right]_0^\pi + \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \cos(nt)\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

2. Soit $t \in]0,\pi]$. On repasse par les nombres complexes, et on calcule plutôt la somme
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^m e^{int} &= \frac{1-e^{i(m+1)t}}{1-e^{it}}\\ &= \frac{-e^{i\frac{m+1}{2}t}2i\sin\left(\frac{m+1}{2}t\right)}{-e^{i\frac{t}{2}}2i\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\\ &= e^{i\frac{m}{2}t}\frac{\sin\left(\frac{m+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\end{aligned}$$
En repassant à la partie réelle, on obtient alors
$$\sum_{n=1}^m \cos(nt) = \frac{\cos\left(\frac{m}{2}t\right)\sin\left(\frac{m+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$
On utilise alors la formule $2\cos(a)\sin(b) = \sin(a+b)+\sin(a-b)$ pour retrouver le résultat :
$$\begin{aligned}\frac{\cos\left(\frac{m}{2}t\right)\sin\left(\frac{m+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} &= \frac{\sin\left(\frac{2m+1}{2}t\right)-\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\\ &= \frac{\sin\left(\frac{2m+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

3. Commençons par montrer que f est continue sur le segment, *i.e.* qu'elle est continue en 0. On a pour $t \to 0$
$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{t^2/2\pi - t}{2\sin(t/2)}\\ &\sim \frac{t^2/2\pi - t}{t}\\ &= \frac{t}{2\pi} - 1\\ &\to -1 = f(0)\end{aligned}$$

f est donc continue en 0.

Maintenant, calculons $f'(t)$ pour $t > 0$, puis faisons tendre t vers 0 :

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \frac{2\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)-\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \\
&= \frac{2\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\left(\frac{t}{2}+o(t^2)\right)-\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\left(1-\frac{t^2}{4}+o(t^2)\right)}{4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \\
&= \frac{\frac{t^2}{\pi}-t-\frac{t^2}{2\pi}+t+o(t^2)}{4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \\
&= \frac{\frac{t^2}{2\pi}+o(t^2)}{4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \\
&\sim \frac{\frac{t^2}{2\pi}+o(t^2)}{t^2} \\
&\to \frac{1}{2\pi}
\end{aligned}$$

La limite étant finie, la fonction f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,\pi]$

4. Commençons par noter que d'après la question précédente, l'intégrale est bien définie.

   On a donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{m}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t \quad \text{question 1} \\
&= \int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\sum_{n=1}^{m}\cos(nt)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\left(\frac{\sin\left(\frac{2m+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t \quad \text{question 2} \\
&= \int_0^{\pi} f(t)\sin\left(\frac{2m+1}{2}t\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi^2}{6}+\int_0^{\pi} f(t)\sin\left(\frac{2m+1}{2}t\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

5. Il suffit donc de montrer que l'intégrale converge quand $m \to \infty$. f étant de classe $\mathcal{C}^1$, on fait une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} f(t)\sin\left(\frac{2m+1}{2}t\right)\mathrm{d}t &= \left[-\frac{2}{2m+1}f(t)\cos\left(\frac{2m+1}{2}t\right)\right]_0^{\pi} \\
&\quad+\frac{2}{2m+1}\int_0^{\pi} f'(t)\cos\left(\frac{2m+1}{2}t\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{-2}{2m+1}+\frac{2}{2m+1}\int_0^{\pi} f'(t)\cos\left(\frac{2m+1}{2}t\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Majorons cette intégrale :

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{2m+1}{2}t\right)\mathrm{d}t\right| \\
&\qquad\leqslant \frac{2}{2m+1}+\frac{2}{2m+1}\int_0^\pi |f'(t)|\left|\cos\left(\frac{2m+1}{2}t\right)\right|\mathrm{d}t \\
&\qquad\leqslant \frac{2}{2m+1}+\frac{2}{2m+1}\int_0^\pi |f'(t)|\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

f' étant continue sur le segment, l'intégrale est finie, et donc par théorème d'encadrement des limites, l'intégrale cherchée converge vers 0. Finalement, la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, et

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$