Matrices antisymétriques

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.

1. On veut montrer que $I_n + M$ est inversible. Soit donc $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $(I_n + M)X = \mathbf{0}_n$.

   (a) Montrer que $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^{\mathsf{t}}YY \geqslant 0$ et ${}^{\mathsf{t}}YY = 0 \Leftrightarrow Y = \mathbf{0}_{n,1}$.

   (b) Montrer que $M^2X = X$, puis que ${}^{\mathsf{t}}(MX)(MX) = -{}^{\mathsf{t}}XX$.

   (c) En déduire que $X = \mathbf{0}_{n,1}$.

   (d) Conclure.

2. On pose $A = (I - M)(I + M)^{-1}$. On veut montrer que $A^{-1} = {}^{\mathsf{t}}A$.

   (a) Justifier que $I - M$ est inversible, puis que A est inversible.

   (b) Montrer que $A^{-1} = (I + M)(I - M)^{-1}$.

   (c) Montrer que ${}^{\mathsf{t}}A = (I - M)^{-1}(I + M)$.

   (d) Il ne reste donc plus qu'à montrer que $I + M$ et $(I - M)^{-1}$ commutent.
   Montrer le lemme suivant :

   $$\forall U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ UV = VU \Rightarrow UV^{-1} = V^{-1}U.$$

   (e) En utilisant le lemme précédent, conclure.

Corrigé

1. (a) La matrice ${}^t YY$ est de taille 1×1, et donc réduite à un réel. On a alors ${}^t YY = \sum_{k=1}^n y_k^2 \geqslant 0$.
   De plus, si ${}^t YY = 0$, alors chacun des y_k est nul, et donc $Y = 0$. La réciproque est évidente.

   (b) D'après l'hypothèse, on a $MX = -X$. On a donc $M^2 X = -MX = X$. Ensuite,

$$\begin{aligned} {}^t(MX)(MX) &= {}^t X \, {}^t M M X \\ &= -\, {}^t X M^2 X \\ &= -\, {}^t X X \end{aligned}$$

   (c) Les deux termes de l'égalité précédente sont positifs par la question 1a, et donc sont nuls.

   (d) Le système $(I_n + M)X = \mathbf{0}$ a donc une unique solution, et donc $I_n + M$ est inversible.

2. (a) La matrice $-M$ est antisymétrique, et donc $I_n - M$ est inversible d'après la partie 1. A est donc le produit de deux matrices inversibles, et donc est inversible.

   (b) C'est du cours.

   (c) On a

$$\begin{aligned} {}^t A &= {}^t((I_n - M)(I_n + M)^{-1}) \\ ) &\, {}^t((I_n + M)^{-1}) \, {}^t(I_n - M) \\ &= (I_n - M)^{-1}(I_n + M) \end{aligned}$$

   (d) Soient U et V deux matrices carrées qui commutent. Alors $U = VUV^{-1}$ et donc $V^{-1}U = UV^{-1}$.

   (e) Il est clair que $I_n - M$ et $I_n + M$ commutent, et donc le lemme précédent assure que $(I_n - M)^{-1}$ et $I_n + M$ aussi.

Matrices monotones

On dit qu'une matrice M est positive si tous ses coefficients sont positifs. On note $M \geqslant 0$.

1. Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est positive *si et seulement si*

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \geqslant 0 \Rightarrow MX \geqslant 0.$$

On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est monotone si elle est inversible et si son inverse et positif.

2. Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est monotone *si et seulement si*

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ MX \geqslant 0 \Rightarrow X \geqslant 0.$$

   Indication : Montrer que l'unique solution de $MX = 0$ est $X = 0$, puis utiliser la question précédente.

3. Soient $c_1, \dots, c_n$ des réels positifs. On veut montrer que la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 2+c_1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2+c_2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2+c_3 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 2+c_{n-1} & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2+c_n \end{pmatrix}$$

   est monotone.
   Soit donc $X = {}^{\mathbf{t}}(x_1, \dots, x_n)$ tel que $CX \geqslant 0$. On pose $x_0 = x_{n+1} = 0$.

   (a) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $(2 + c_k)x_k \geqslant x_{k-1} + x_{k+1}$.

   (b) On appelle p le plus petit indice tel que x_p soit le plus petit coefficient dans X.
   Montrer que si $p = 1$ ou $p = n$, alors $X \geqslant 0$.

   (c) Si $p \in [\![2, n-1]\!]$, montrer que $c_p x_p \geqslant 0$.
   Montrer qu'il est impossible d'avoir $c_p = 0$.

   (d) Conclure.

Corrigé

1. Supposons M positive. Soit X un vecteur colonne positif. Alors les coefficients du vecteur colonne MX sont de la forme $\sum_{k=1}^{n} M_{ik} X_k \geqslant 0$.

   Réciproquement, supposons que pour toute matrice colonne positive X, $MX \geqslant 0$. On considère alors les X dont tous les coefficients sont nuls, sauf le i-ième. Le produit MX est donc la matrice colonne $\begin{pmatrix} M_{i1} \\ \vdots \\ M_{in} \end{pmatrix}$, qui est positive. Tous les coefficients de M sont donc positifs.

2. Supposons M monotone. Soit X une matrice colonne telle que $MX \geqslant 0$. Par positivité de M^{-1}, les coefficients de $M^{-1}MX$ sont tous positifs ; et donc $X \geqslant 0$.

   Réciproquement, supposons que pour toute matrice colonne X, $MX \geqslant 0 \Rightarrow X \geqslant 0$. Soit X tel que $MX = 0$. Alors nécessairement, $X \geqslant 0$. Mais on a aussi $M(-X) = 0$, et donc $-X \geqslant 0$. On en déduit $X = 0$, et donc A inversible.

   Soit X un vecteur colonne positif. Alors $M(M^{-1}X) = X \geqslant 0$, et par hypothèse, $M^{-1}X \geqslant 0$. Par la question précédente, M^{-1} est positive, et donc M est monotone.

3. (a) Le i-ième coefficient de CX est $-x_{i-1} + (2 + c_i)x_i - x_{i+1}$. Comme il est positif, on a donc bien l'inégalité demandée.

   (b) Supposons $p = 1$. Alors la question précédente donne $(2 + c_1)x_1 \geqslant x_2$, et donc $x_2 - x_1 \leqslant x_1$. Mais on a aussi $x_2 - x_1 \geqslant 0$ par minimalité, et donc $x_1 \geqslant 0$. Finalement, $X \geqslant 0$.

   Si $p = n$, le même raisonnement nous donne $v_{n-1} - v_n \leqslant v_n$, et $v_{n-1} - v_n \geqslant 0$ par minimalité. Finalement, $v_n \geqslant 0$ et donc $X \geqslant 0$.

   (c) Supposons $p \neq 1, n$. On a alors

   $$c_p x_p \geqslant x_{p-1} + x_{p+1} - 2x_k = (x_{p-1} - x_p) + (x_{p+1} - x_p) \geqslant 0.$$

   Si on avait $c_p = 0$, on aurait alors $2x_p \geqslant x_{p-1} + x_{p+1}$, ce qui est impossible par minimalité.

   (d) Dans les cas $p = 1$ et $p = n$, on a déjà conclu. Dans les autres cas, on a nécessairement $x_p \geqslant 0$, et donc $X \geqslant 0$.

   La matrice C est donc monotone.