Chapitre 1

Fonctions usuelles

Dans ce chapitre, nous allons revoir quelques fonctions usuelles, ainsi que leurs propriétés.

1.1 Fonction exponentielle

On définit la fonction exponentielle par la propriété suivante :

Proposition 1.1.1
Il existe une unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$*, appelée* exponentielle *et notée* exp*, telle que :*

- $\exp(0) = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp'(x) = \exp(x)$

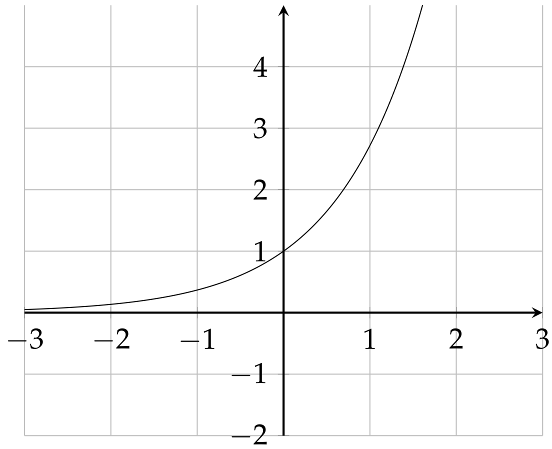
On note e l'image de 1, et on note alors $\exp(x) = e^x$. On justifie cette notation "puissance" par les propriétés suivantes :

Proposition 1.1.2
Pour tous $x, y, \alpha \in \mathbb{R}$*, on a :*

- $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$
- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$
- $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- $\exp(\alpha x) = \exp(x)^\alpha$
- $e^{x+y} = e^x e^y$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $e^{\alpha x} = (e^x)^\alpha$

La fonction exponentielle est toujours strictement positive , et donc par dérivation strictement croissante .

Voici la courbe de la fonction exponentielle :



1.2 Logarithme népérien

La fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^{+*}$. Elle a donc une fonction réciproque, qu'on appelle *logarithme népérien*, et notée ln. La fonction ln est donc définie de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$.

NOTA

Si on définit usuellement le logarithme comme la réciproque de l'exponentielle, ce n'est pas le sens historique. On a tout d'abord créé le logarithme népérien (1614) pour faciliter les calculs astronomiques, et seulement au XVIIIe siècle pour l'exponentielle.

De la définition du logarithme népérien suivent les propriétés suivantes :

Proposition 1.2.1

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\exp(x)) = x.$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \exp(\ln(x)) = x.$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}^{+*},\ \exp(x) = y \Leftrightarrow x = \ln(y).$$

Par définition, le logarithme a toutes les propriétés duales de l'exponentielle :

Proposition 1.2.2
Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$:

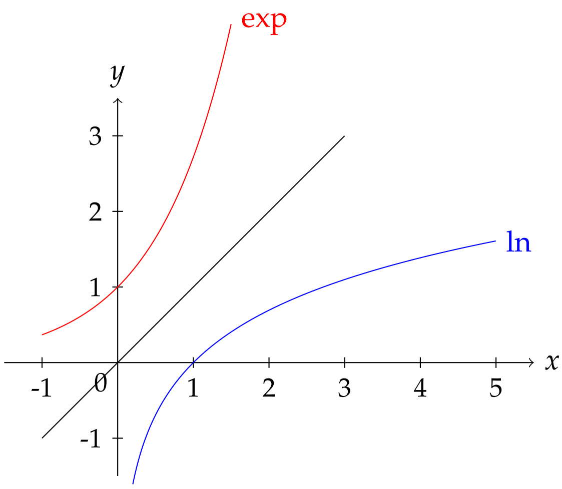
- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$

En utilisant les propriétés de dérivation des fonctions réciproques (cf. le chapitre *Dérivation*), on a

Proposition 1.2.3

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Voici les courbes des fonctions exponentielles et logarithme népérien (symétrique l'une de l'autre par rapport à la première diagonale) :



1.3 Exponentielles et logarithmes de base quelconque

L'exponentielle et le logarithme népérien vu dans les deux sections précédentes sont dites de base e. Mais on peut choisir une autre base pour définir d'autres exponentielles et logarithmes.

NOTA

Si on ne précise rien, les termes *exponentielle* et *logarithme* se rapportent aux fonctions de base e.

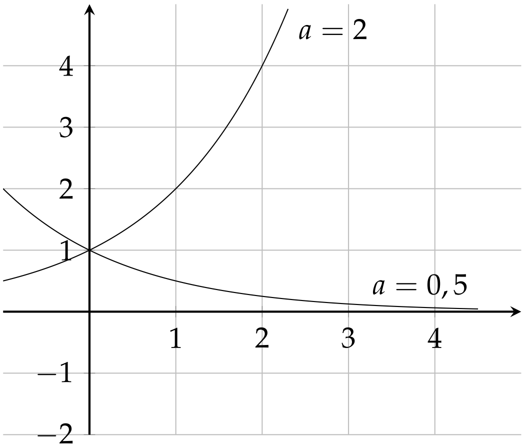
Définition 1.3.1
Pour tout $a > 0$*, on définit l'*exponentielle de base a *par la formule :*

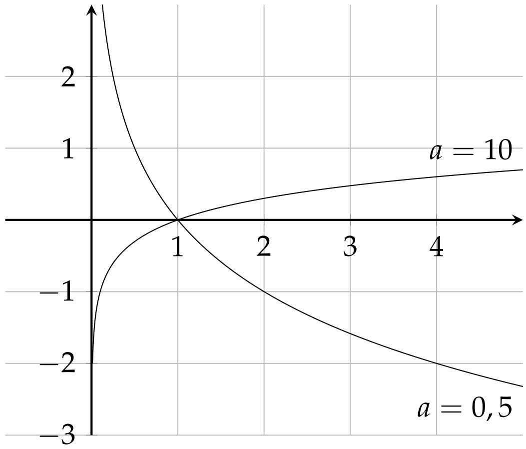
$$\forall x \in \mathbb{R},\ a^x = \exp(x \ln(a)).$$

Pour tout $a > 0$, $a \neq 1$*, on définit le* logarithme de base a *par la formule :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \log_a(x) = \frac{ln(x)}{\ln(a)}.$$

Ces formules permettent de trouver toutes les propriétés, les dérivées, les variations, *etc.* de ces fonctions à partir de celles de l'exponentielle et du logarithme.





1.4 Puissances

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on peut définir la fonction *puissance* α sur $\mathbb{R}^{+*}$ par la formule :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}.$$

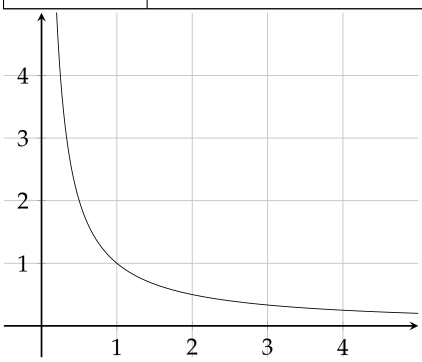
Par opération sur les dérivées, cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, et sa dérivée vaut

$$\forall x > 0,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

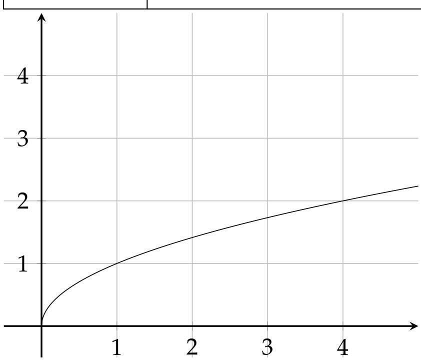
Les variations de ces fonctions dépendent donc du signe de α :

- $\alpha < 0$
- $0 < \alpha < 1$
- $\alpha > 1$

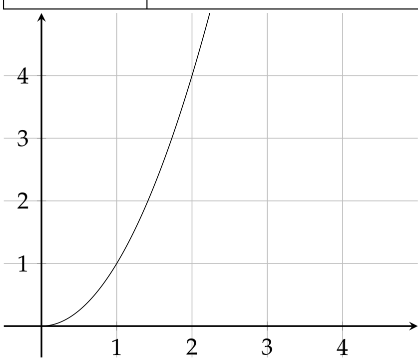
x	0	$+\infty$
Variations de x^α	$+\infty$ ↘	0



x	0	$+\infty$
Variations de x^α	0 ↗	$+\infty$



x	0	$+\infty$
Variations de x^α	0 ↗	$+\infty$



1.5 Limites et croissances comparées

Il y a un certain nombre de limites à connaître.

Proposition 1.5.1 : Limites des exponentielles
L'exponentielle de base a admet des limites en l'infini :

- *Si* $0 < a < 1$,
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} a^x = 0.$$
- *Si* $a > 1$ *(en particulier pour l'exponentielle de base* e*,*
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty.$$

Proposition 1.5.2 : Limites des logarithmes
Le logarithme de base a admet des limites en 0 *et l'infini :*

- *Si* $0 < a < 1$,
$$\lim_{x\to 0} \log_a(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = -\infty.$$
- *Si* $a > 1$ *(en particulier pour le logarithme népérien),*
$$\lim_{x\to 0} \log_a(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = +\infty.$$

Proposition 1.5.3 : Limites des puissances
La fonction puissance α admet des limites en 0 *et l'infini :*

- *Si* $\alpha < 0$,
$$\lim_{x\to 0} x^\alpha = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} x^\alpha = 0.$$
- *Si* $\alpha > 0$,
$$\lim_{x\to 0} x^\alpha = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty.$$

On doit aussi connaître les limites de produits et quotients de fonctions usuelles.

Proposition 1.5.4 : Limites puissance/exponentielle
L'exponentielle croît et décroît plus vite que n'importe quelle puissance, i.e.

$$\forall\alpha > 0,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

et

$$\forall\alpha > 0,\ \lim_{x\to-\infty} e^x x^\alpha = 0.$$

Proposition 1.5.5 : Limites puissance/logarithme
L'exponentielle croît et décroît plus vite que n'importe quelle puissance, i.e.

$$\forall\alpha > 0,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$$

et

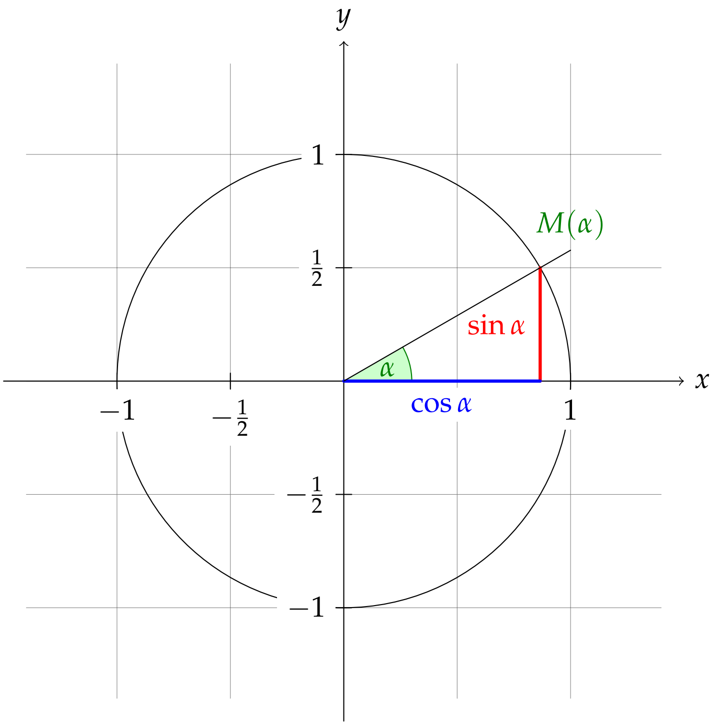
$$\forall\alpha > 0,\ \lim_{x\to 0} \ln(x) x^\alpha = 0.$$

On pourra retenir la phrase suivante : Le logarithme est moins fort que les puissances, qui sont elles-mêmes moins fortes que l'exponentielle.

1.6 Fonctions trigonométriques

On va, dans cette section, rappeler les propriétés des trois fonctions trigonométriques : *cosinus, sinus et tangente.*

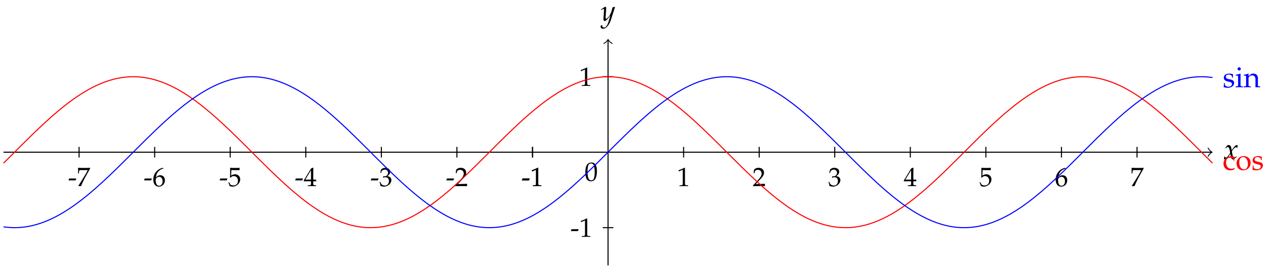
Définition 1.6.1
À tout réel α, on associe le point $M(\alpha)$ d'abscisse curviligne α.

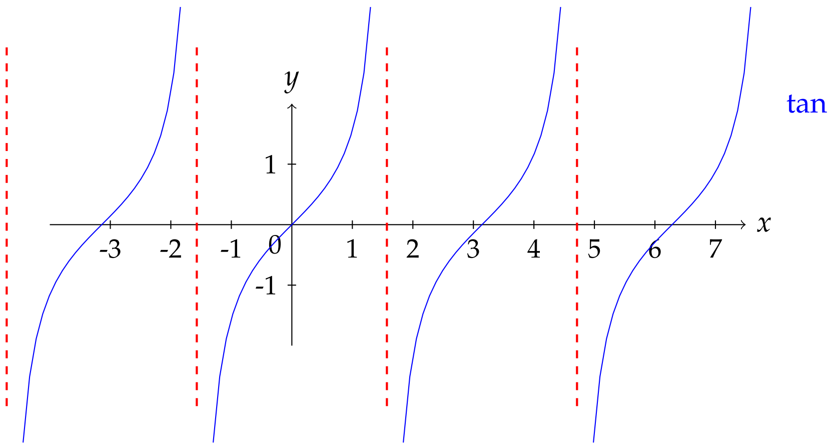


On appelle alors cosinus de α *l'abscisse de* $M(\alpha)$ *notée* $\cos(alpha)$ *, et* sinus de α *l'ordonnée de* $M(\alpha)$ *notée* $\sin(\alpha)$.

On définit aussi la tangente de α *comme le rapport* $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

Voici les courbes de ces fonctions :





Il faut connaître quelques valeurs remarquables des fonctions trigonométriques :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$

Proposition 1.6.2
La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$, *paire,* 2π*-périodique , et elle est dérivable de dérivée* $-\sin$.

La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$, *impaire,* 2π*-périodique , et elle est dérivable de dérivée* $\cos$.

La fonction tan est définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$, *impaire,* π*-périodique , et elle est dérivable où elle est définie de dérivée* $\frac{1}{\cos}^2 = 1+\tan^2$.

Il faut connaître les formules de trigonométrie suivantes :

Proposition 1.6.3
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$
- $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$
- $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$
- $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = +\sin(x)$
- $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
- $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
- $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

Pour des x, y qui conviennent[1], on a de plus

- $\tan(x + y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$
- $\tan(x - y) = \frac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}$
- $\tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\frac{1}{\tan(x)}$
- $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan(x)}$

1. Exercice : expliciter

Exercices

Exercice 1. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

- $3e^{2x} - 2e^x = -1$
- $e^x + e^{-x} = 8$
- $\ln(3x+1) + \ln(2x-1) = 1$
- $2e^{-x} = \frac{1}{e^x+2}$

Exercice 2. Démontrer les inégalités suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \ln(1+x) \leqslant x.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \ln(1+x) \geqslant x - \frac{x^2}{2}.$$

Donner une interprétation graphique de ces résultats.

Exercice 3. Déterminer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{2x}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} - e^x + 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} 2xe^{-x}$

Exercice 4. Montrer que

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^{+*},\ \frac{1}{2}\left(\ln(a) + \ln(b)\right) \leqslant \ln\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Exercice 5. Calculer les limites quand $x \to 0$ de x^{x^x} et $(x^x)^x$.

Exercice 6. (Lemme de Gibbs)

a) Justifier que $\forall x > 0,\ \ln(x) \leqslant x - 1$

b) Soient $(p_1, \ldots, p_n)$ et $(q_1, \ldots, q_n)$ des n-uplets de réels strictement positifs tels que $\sum_{k=1}^n p_k = \sum_{k=1}^n q_k = 1$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \ln(q_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} p_k \ln(p_k).$$

Exercice 7. Montrer que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$. En déduire que pour tout n

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Exercice 8. Établir que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\sin x \leq x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

Exercice 9. Soit $x \neq 0 \pmod{2\pi}$. Montrer

$$\sin(x) + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx) = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2} \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

en procédant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10. Résoudre l'équation

$$\tan x \tan 2x = 1$$

Exercice 11. Simplifier

$$\frac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q}$$

En déduire la valeur de

$$\tan \frac{\pi}{24}$$