Chapitre 2

Corps des réels et méthodes de calcul

2.1 Rappels sur le théorème de récurrence

Dans cette section, on va rappeler un principe fondamental des entiers naturels :

Théorème 2.1.1 : de récurrence
Soit A une partie de $\mathbb{N}$. Si

alors $A = \mathbb{N}$.

Si φ est une propriété sur les entiers naturels, en appliquant le théorème de récurrence à $\{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n)\}$, on en déduit le théorème :

Théorème 2.1.2
Soit φ une propriété sur les entiers naturels. Si

-
-

alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n)$.

On donne dans les exemples suivants (à connaître par cœur) une rédaction possible pour appliquer ce théorème.

Exemple

On veut montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Soit $\varphi(n)$ la propriété « $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ ». On a alors

- *Initialisation :* On a bien $\varphi(0)$, car

- *Hérédité :* Soit n un entier naturel. On suppose $\varphi(n)$, et on montre $\varphi(n+1)$.

$$\sum_{k=0}^{n+1} k =$$

$$=\qquad\qquad \text{par hypothèse}$$

$$=$$

  Donc $\varphi(n+1)$.

Par le théorème de récurrence, on a bien , *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad .$$

EXEMPLE

Soit q un réel tel que $q \neq 1$. On veut montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Soit $\varphi(n)$ la propriété « $\sum_{k=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ». On a alors

- *Initialisation :* On a bien $\varphi(0)$, car
- *Hérédité :* Soit n un entier naturel. On suppose $\varphi(n)$, et on montre $\varphi(n+1)$.

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k =$$

$$=\qquad\qquad \text{par hypothèse}$$

$$=$$

  Donc $\varphi(n+1)$.

Par le théorème de récurrence, on a bien , *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad .$$

2.1.1 Calculs de sommes

En plus des deux exemples précédents, il faut connaître les règles suivantes sur les sommes :

Proposition 2.1.3
Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$, tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et toutes suites de réels (x_k) et (y_k) :

- Linéarité : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \lambda x_k =$
- Linéarité : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} (x_k + y_k) =$
- Relation de Chasles : $\forall m \in \{p, \dots, n-1\}$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{m} x_k + \sum_{k=m+1}^{n} x_k =$
- Changement d'indice : $\forall m \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} x_{k+m} =$
- Téléscopage : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} (x_{k+1} - x_k) =$

2.1.2 Calculs de produits

De la même façon qu'on utilise le symbole Σ pour les sommes, on peut faire de même avec les produits en utilisant le symbole Π : si (x_i) est une suite de nombres et $p \leqslant n$ des entiers, alors

$$\prod_{i=p}^{n} x_i = \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

EXEMPLE

On définit la fonction *factorielle* sur $\mathbb{N}^*$, notée ! par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n! = \qquad\qquad .$$

Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n! =$.
Par convention, on étend cette fonction à $\mathbb{N}$ tout entier en posant $0! =$.

On énonce des règles analogues à celles de la somme :

Proposition 2.1.4
Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$, tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et toutes suites de réels (x_k) et (y_k) :

- $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} \lambda x_k =$
- $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} (x_k y_k) =$

- Relation de Chasles : $\forall m \in \{p, \ldots, n-1\}$, $\prod_{k=p}^{m} x_k \times \prod_{k=m+1}^{n} x_k =$

- Changement d'indice : $\forall m \in \mathbb{N}$, $\prod_{k=p}^{n} x_{k+m} =$

- Téléscopage : $\prod_{k=p}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k} =$

2.2 Le corps des réels

2.2.1 Structure algébrique

L'ensemble des nombres réels est un *corps commutatif*, *i.e.*

1. Il est muni d'une opération interne, l'addition notée $+$
2. L'addition est commutative, *i.e.*
3. L'addition est associative, *i.e.*
4. L'addition possède un élément neutre, noté 0, *i.e.*
5. Tous les réels possèdent un opposé, *i.e.*
   L'opposé du nombre $a \in \mathbb{R}$ est noté $-a$

Ces cinq premiers points font de $\mathbb{R}$ un *groupe abélien*.

6. Il est muni d'une deuxième opération interne, la multiplication notée $\times$, $\cdot$ ou simplement par juxtaposition
7. La multiplication est commutative, *i.e.*
8. La multiplication est associative, *i.e.*
9. La multiplication possède un élément neutre, noté 1, *i.e.*
10. La multiplication est distributive sur l'addition, *i.e.*

Ces 10 points font de $\mathbb{R}$ un anneau unitaire commutatif.

11. Tous les réels possèdent un inverse, *i.e.*
    L'inverse de a est noté a^{-1} ou $\frac{1}{a}$.

2.2.2 Identités remarquables

Il faut absolument connaître les identités remarquables suivantes :

Proposition 2.2.1
Pour tous réels a et b,

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= \\
(a-b)^2 &= \\
(a+b)(a-b) &= \\
(a+b)^3 &= \\
(a-b)^3 &= \\
(a-b)(a^2+ab+b^2) &= \\
(a+b)(a^2-ab+b^2) &=
\end{aligned}$$

De plus, pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned}
a^n - b^n &= \\
&=
\end{aligned}$$

2.2.3 Ordre

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre total, notée $\leqslant$, *i.e.*

- *Réflexivité :*
- *Antisymétrie :*
- *Transitivité :*
- *Totalité :*

Cet ordre est compatible avec l'addition, et dans le cas positif avec la multiplication :

Proposition 2.2.2
Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Alors

- $a \leqslant b \Rightarrow$
- $a \leqslant b$ et $c \leqslant d \Rightarrow$
- $a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \Rightarrow$
- $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d \Rightarrow$

Après quelques définitions générales, on veut donner un résultat fondamental à propos de l'ordre sur $\mathbb{R}$.

Définition 2.2.3
Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- *On dit qu'un réel M* majore *A (ou est* un majorant de *A) si*

- *On dit qu'un réel m* minore *A (ou est* un minorant de *A) si*

- *On dit qu'un réel M est un* maximum de *A si*
- *On dit qu'un réel m est un* minimum de *A si*

EXEMPLE

On considère l'ensemble $A =]0,1]$. Alors $7, 2, 12, \pi, 1$ sont des majorants de A. 1 est un maximum de A.
$-1, 0, -40$ sont des minorants de A, mais aucun n'est un minimum.

NOTA

Attention, une partie de $\mathbb{R}$ n'admet pas forcément de majorant, minorant, maximum, minimum.

Définition 2.2.4
Soit A un ensemble majoré (resp. minoré) de $\mathbb{R}$. S'il existe, on appelle borne supérieure (resp. inférieure) de *A le minimum (resp. maximum) de l'ensemble des majorants (resp. minorants) de A.*

On note $\sup A$ *(resp.* $\inf A$*) la borne supérieure (resp. inférieure) de A.*

EXEMPLE

Reprenons $A =]0,1]$. Alors les majorants de A sont tous les réels supérieurs à 1, donc $[1, +\infty[$.
Le minimum de cet ensemble est , et donc est la de A.
De la même façon, 0 est sa

Théorème 2.2.5 : de la borne supérieure (admis)
Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure (resp. inférieure).

2.3 Quelques fonctions usuelles

2.3.1 La valeur absolue

Une fonction fondamentale en analyse est la *valeur absolue*. Elle ne touche pas aux nombres positifs, et change le signe des nombres négatifs.

Définition 2.3.1
On appelle valeur absolue *la fonction*

$$|\cdot| : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x & \textit{si } x \geqslant 0 \\ -x & \textit{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 2.3.2 : Inégalité triangulaire
Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$*,*

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

Pour la preuve, on utilisera les résultats suivants :

Lemme 2.3.3
Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$*,*

- $|x|^2 =$
- $|xy| =$

Démonstration. On commence par remarquer que

$$|x+y|^2 =$$

Or $xy \leqslant |x||y|$ et $x^2 = |x|^2$ et $y^2 = |y|^2$, et donc

$$|x+y|^2 \leqslant$$

$|x+y|$ et $|x| + |y|$ sont deux nombres positifs, et donc on obtient le résultat voulu □

En appliquant ce théorème à $x + y - y$ et $x + y - x$, on obtient

$$|x| \leqslant \qquad \text{et } |y| \leqslant$$

c'est-à-dire

$$|x| - |y| \leqslant \qquad \text{et } |y| - |x| \leqslant$$

En analysant les cas $|x| \leqslant |y|$ et $|y| \leqslant |x|$, on obtient la propriété suivante :

Proposition 2.3.4
Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$||x| - |y|| \leqslant |x + y|$$

2.3.2 Puissances fractionnaires

On a vu dans la section 1.4 les fonctions puissances, pour des puissances réelles. On peut en fait définir facilement des fonctions puissances pour des exposants fractionnaires.

Définition 2.3.5
Soient $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$. Alors on définit la fonction puissance $\frac{p}{q}$ *par*

$$\cdot^{\frac{p}{q}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^{\frac{p}{q}} \end{array},$$

où $x^{\frac{p}{q}}$ est défini comme l'unique réel positif tel que

NOTA

Dans le cas où $p = 1$, on parle de *racine q-ième*, notée

$$x^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x}.$$

NOTA

Ces fonctions coïncident avec les fonctions puissances définies dans la section 1.4.

2.3.3 Partie entière

Définition 2.3.6
Pour tout réel x, il existe un unique entier, noté $\lfloor x \rfloor$ tel que

EXEMPLE

On a $\lfloor 2,3 \rfloor =$, $\lfloor -1,1 \rfloor =$, $\lfloor \pi \rfloor =$.

Attention, il ne suffit pas

.

2.4 Exercices

Exercice 1. Déterminer, si elles existent, la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 2. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. On pose

$$B = \{|x-y| \mid x, y \in A\}$$

a) Montrer que B est non vide et borné.

b) Montrer que $\sup B = \sup A - \inf A$.

c) Montrer que B admet un minimum, et le déterminer.

Exercice 3. Montrer que pour tous $x, y \in R$,

$$|x| + |y| \leqslant |x+y| + |x-y| \leqslant 2(|x| + |y|).$$

Exercice 4. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Exercice 5. a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

b) En déduire la partie entière de $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 7. *Ces sommes sont à connaître par cœur* Montrer que la somme des n premiers carrés vaut $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, et que la somme des n premiers cubes vaut $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

Exercice 8. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \times k!$.

Exercice 9. Calculer les produits $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$ et $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$