Chapitre 3

Systèmes linéaires

Dans ce chapitre, on va voir une méthode de résolution des systèmes d'équations linéaires.

3.1 Vocabulaire

Définition 3.1.1
Soit n et p deux entiers non nuls.

On appelle système linéaire de n équations à p inconnues $x_1, \ldots, x_p$ *tout système de la forme*

où les a_{ij} et les b_i sont des nombres (réels ou complexes).

Dans le cas d'un tel système, un p-uplet de valeurs $x_1, \ldots, x_p$ est *solution du système* si les n équations sont vérifiées.

Résoudre le système, c'est

Un système *compatible* est

Un système *homogène* est

Deux systèmes linéaires sont dits *équivalents* s'ils

Si $n = p$ et que le système admet une unique solution, alors le système est dit *de Cramer* [1].

1. Gabriel Cramer. Mathématicien suisse, 1704 - 1752

NOTA

Donc, un système de Cramer homogène n'admet que comme solution.

Définition 3.1.2
On dit qu'un système est echelonné *s'il est de la forme*

où $a_{rr} \neq 0$.

Autrement dit, pour passer d'une ligne à l'autre, on doit "enlever" au moins une inconnue "à gauche".

Dans le cas d'un système compatible, les dernières équations de la forme $0 = b_j$ sont appelées Si elles sont vérifiées, alors on peut fixer les valeurs de $x_{r+1}, \ldots, x_p$ et en déduire les autres inconnues en "remontant" le système.

Dans le cas $n = p$, on parle de Dans ce cas, si *tous* les a_{ii} sont non nuls, alors

EXEMPLE

Le système

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ \quad\; y + z = 2 \\ \qquad 3z = 6 \end{cases}$$

est triangulaire. On trouve comme solutions :

EXEMPLE

Le système

$$\begin{cases} x + 2y - z + 2t = 1 \\ \quad\; y + z - t = 2 \\ \qquad 3z = 6 \end{cases}$$

est échelonné. On trouve comme solutions :

3.2 Le pivot de Gauss

Dans cette section, nous allons voir une méthode générale qui fonctionne pour résoudre n'importe quel système linéaire : le *pivot de Gauss* [2].

2. Carl Friedrich Gauß. Scientifique allemand, 1777 - 1855

On appellera *opérations licites* les opérations suivantes :

-
-
-

On a alors le théorème fondamental suivant :

Théorème 3.2.1
En appliquant des opérations licites à un système linéaire, on obtient toujours un système linéaire, qui est équivalent à celui de départ.

Le but de la méthode est donc d'utiliser intelligemment ces trois règles pour transformer le système linéaire qu'on veut résoudre en un système linéaire équivalent, échelonné ou triangulaire.

EXEMPLE

On veut résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 3x & + & y & - & z & = & 2 & \quad (L_1) \\ x & - & 2y & + & z & = & 3 & \quad (L_2) \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & -1 & \quad (L_3) \end{array}\right.$$

Étape 1 : Utiliser la première ligne pour faire disparaître les x dans les suivantes.

On veut faire disparaître x dans la deuxième ligne. On a deux choix :

- ajouter à L_2
- multiplier L_2 par , puis ajouter à L_2

La deuxième méthode permet de retarder l'apparition des fractions.

$$\left\{ \right.$$

$$\left\{ \right.$$

On veut maintenant faire disparaître x dans la troisième ligne.

$$\left\{ \right.$$

Étape 2 : Utiliser la deuxième ligne pour faire disparaître les y dans les suivantes.

On remarque qu'il suffit d'ajouter L_2 à L_3 pour faire disparaître les y dans L_3.

$$\left\{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right.$$

Étape 3 : Conclure.

En remontant le système, on trouve (dans l'ordre) :

- $z =$
- $y =$
- $x =$

3.3 Exercices

Exercice 1. On considère les deux systèmes

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 10x & + & 9y & + & z & = & -50 \\ 9x & + & 10y & + & 5z & = & 40 \\ x & + & 5y & + & 9z & = & 180 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 10x & + & 9y & + & z & = & -50 \\ 9x & + & 10y & + & 5z & = & 41 \\ x & + & 5y & + & 9z & = & 180 \end{array}\right.$$

Résoudre (S_1) et (S_2) et commenter le résultat.

Exercice 2. Résoudre les systèmes en fonction de $a, b \in \mathbb{R}$.

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & = & a \\ -x & + & 4y & = & b \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & = & a \\ -x & - & \frac{1}{2}y & = & b \end{array}\right.$$

Exercice 3. Soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels. À quelle condition sur les a_i le système admet-il une solution ?

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 2a_1 \\ x_2 & + & x_3 & = & 2a_2 \\ & \cdots & & & \\ x_n & + & x_1 & = & 2a_n \end{array}\right.$$

Exercice 4. Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre le système suivant en discutant selon les valeurs de m :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} mx & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & my & + & 5z & + & t & = & m \\ x & + & y & + & mz & + & t & = & m+1 \end{array}\right.$$

Exercice 5. Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcccrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \cdots & + & x_n & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & \cdots & + & 2x_n & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & \cdots & + & 3x_n & = & 1 \\ & & & & \vdots & & & & & & \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & \cdots & + & nx_n & = & 1 \end{array}\right.$$