Chapitre 4

Ensembles et applications

4.1 Théorie naïve des ensembles

En mathématiques, tout ce qu'on considère est en fait un ensemble ; l'ensemble est une sorte de "brique de base" des mathématiques.

Intuitivement, un *ensemble* est

Si un objet x est dans un ensemble E, on dit que , et on note

EXEMPLE

On connaît déjà un certain nombre d'ensembles : l'ensemble des entiers naturels, noté , l'ensemble des réels, noté ,*etc.*

Parmi tous les ensembles, on en distingue un particulier : l'ensemble

On distingue deux façons de décrire des ensembles :

- en *extension :*
- en *compréhension :*

EXEMPLE

L'ensemble des nombres naturels pairs inférieurs à 10 est donné en extension par , et en compréhension par

Définition 4.1.1
On dit qu'un ensemble A est inclu *dans un ensemble E si tous les éléments de A sont aussi dans E,* i.e.

On dit alors que A est une partie de *B.*

L'ensemble des parties d'un ensemble E est noté .

On dira que deux ensembles sont égaux s'ils sont *inclus l'un dans l'autre*. Ainsi, pour montrer une égalité d'ensembles, on devra faire deux preuves :

- montrer que tous les éléments du premier ensemble sont dans le second
- montrer que tous les éléments du second ensemble sont dans le premier.

4.1.1 Opérations sur les ensembles

On peut faire un certain nombre de choses avec les ensembles.

Définition 4.1.2
Soient A et B deux ensembles. On définit alors

- *L'*union *de A et B, notée , comme l'ensemble des objets qui sont dans A ou dans B :*
$$x \in A \cup B \Leftrightarrow \quad .$$
- *L'*intersection *de A et B, notée , comme l'ensemble des objets qui sont dans A et dans B :*
$$x \in A \cap B \Leftrightarrow \quad .$$
- *Pour tout ensemble E tel que $A \in E$, le* complémentaire de A dans E*, noté ou ou* [1]

L'union et l'intersection se généralisent à des familles d'ensembles :

Définition 4.1.3
Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles inclus dans un ensemble E. On définit alors l'union des A_i par

$$\bigcup_{i \in I} A_i =$$

et l'intersection des A_i par

$$\bigcap_{i \in I} A_i =$$

Ces opérations ont des propriétés de commutativité, d'associativité et de distributivité :

Proposition 4.1.4
Soient E un ensemble, et $A, B, C \in \mathrm{P}(E)$. Alors

- commutativité :

et

1. avec cette notation, E doit être implicitement connu

- associativité de $\cup$:

- associativité de $\cap$:

- distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$:

- distributivité de $\cup$ par rapport à $\cap$:

- Lois de Morgan :

et

Démonstration. En exercice (penser à prouver deux inclusions à chaque fois) □

Définition 4.1.5
Soient E et F deux ensembles. On appelle produit cartésien[2] *de E et F, noté , l'ensemble*

.

Si $E_1, \ldots, E_n$ sont des ensembles, le produit des E_i, noté est l'ensemble

.

NOTA

Si on veut définir des n-uplets de nombres réels, on devrait noter
. Pour éviter cela, on utilisera la notation "puissance", et on notera directement .

4.2 Applications

Définition 4.2.1
Une application f *est la donnée de*

-

2. ou simplement *produit*, si le contexte est clair

-

-

NOTA

> Attention, chaque élément de l'ensemble de départ doit avoir une et une seule *image*. En revanche, les éléments de l'ensemble d'arrivée peuvent avoir zéro, une ou plusieurs *antécédents*.

Pour une telle application, on notera

$$f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

L'ensemble des applications de E dans F sera noté .

Parmi toutes les applications, on en distingue une particulière :

Définition 4.2.2
On appelle identité de E *l'application*

$$\mathrm{id}_E: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}.$$

4.2.1 Opérations sur les applications

Définition 4.2.3
On dit que deux applications f et g sont égales si[3] *:*

- *f et g ont*
- *f et g ont*
- *pour tout x dans l'ensemble de départ,* .

NOTA

> Attention ! D'après la définition, les fonctions
>
> $$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$
>
> ne sont pas égales.

3. Attention, il ne faut pas oublier les deux premiers points.

Définition 4.2.4
Soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$. On appelle composition de f et g, *notée $g \circ f$, l'application*

NOTA

Attention, pour pouvoir composer f et g, il faut absolument que l'ensemble d'arrivée de f soit celui de départ de g.

EXEMPLE

Soient $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$. Alors on peut composer g et f, et

$$f \circ g : \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longmapsto \end{array}$$

En revanche, on ne peut pas composer f et g (on pourrait si
).

Proposition 4.2.5
Soient $f \in F^E$, $g \in G^F$ et $f \in H^G$. Alors

- $\mathrm{id}_F \circ f =$ *et* $f \circ \mathrm{id}_E =$
- $f \circ (g \circ h) =$.

Définition 4.2.6
Soit $f : A \to B$ une application. Soit $C \subseteq A$. On appelle restriction de f à C *l'application*

Définition 4.2.7
Soient A, B, C trois ensembles, avec $C \subseteq A$. Soient $f : A \to B$ et $g : C \to B$. On dit que f est un prolongement de g *si $f|_C = g$.*

4.2.2 Injections, surjections, bijections

Comme dit plus haut, un élément de l'ensemble d'arrivée d'une application peut avoir ,
ou antécédents. On classe donc les applications suivant ce critère :

Définition 4.2.8
Soit $f : A \to B$ une application. On dit que f est :

- injective *lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée a*

- surjective *lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée a*
- bijective *lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée a*

Ainsi, une application est bijective lorsqu'elle est à la fois injective et surjective.

Proposition 4.2.9
Soit $f : A \to B$ une application. Alors f est injective si et seulement si

Démonstration. Supposons que f est injective. Soient $x, y \in A$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors x et y sont , et donc

Supposons maintenant que $\forall x, y \in A,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$. Soit $a \in B$; supposons
Alors

□

EXERCICE

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Alors

- f et g injectives $\Rightarrow g \circ f$ injective
- f et g surjectives $\Rightarrow g \circ f$ surjective
- $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective
- $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective

Les bijections sont les applications les plus intéressantes, car on peut définir leur *réciproque*.

Définition 4.2.10
Soit $f : E \Rightarrow F$ une application. Alors f est bijective si et seulement s'il existe $g : F \to E$ telle que

et .

Dans ce cas, cette fonction est unique et s'appelle la réciproque de f*, et est notée* f^{-1}.

Démonstration. En exercice. □

Proposition 4.2.11
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Alors si f et g sont bijectives, $g \circ f$ aussi et

$$(g \circ f)^{-1} = \qquad .$$

4.2.3 Images directes et réciproques

On sait comment prendre l'image d'un élément de l'ensemble de départ, mais on aimerait maintenant pouvoir prendre les images de tous les éléments d'un sous-ensemble.

Définition 4.2.12
Soit $f : E \to F$ une application.

Pour tout $A \subseteq E$, on appelle image directe de A par f *l'ensemble*

$$f(A) =$$

Pour tout $B \subseteq F$, on appelle image réciproque de B par f *l'ensemble*

$$f^{-1}(B) =$$

NOTA

Attention aux notations ! Dans ce contexte, f^{-1} ne *désigne pas* la réciproque de f, qui peut d'ailleurs ne pas exister.

EXEMPLE

On a par exemple $\exp^{-1}([1, +\infty[) =$ et $\sin(\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}) =$

On peut alors caractériser les surjections :

Proposition 4.2.13
Soit $f : E \to F$. Alors f est surjective si et seulement si .

4.3 Exercices

Exercice 1. Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble. Peut-on écrire :

(i) $a \in E$
(ii) $a \subset E$
(iii) $\{a\} \subset E$
(iv) $\emptyset \in E$
(v) $\emptyset \subset E$
(vi) $\{\emptyset\} \subset E$?

Exercice 2. Soit $f : A \to B$ définie par $f(x) = x^2$. Donner des exemples de $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tels que

- f soit surjective, mais pas injective
- f soit injective, mais pas surjective
- f ne soit ni injective, ni surjective
- f soit bijective.

Exercice 3. Soient f et g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par :

$$f(k) = 2k \text{ et } g(k) = \begin{cases} k/2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ (k-1)/2 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}.$$

(i) Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et g.
(ii) Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$. Ces applications sont-elles injectives/surjectives/bijectives ?

Exercice 4. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -(n+1)/2 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$.

Montrer que f est bien définie et bijective.

Exercice 5. Soit $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = f$.

Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 6. Soit $f : E \to F$. Montrer que pour toute partie A et E,

$$f^{-1}(f(A)) \supseteq A$$

et qu'on a égalité si et seulement si f est injective.

Exercice 7. Soit $f : E \to I$ une application surjective. On pose pour tout $i \in I$,

$$A_i = f^{-1}(\{i\}).$$

Montrer que les A_i sont non vides, deux à deux disjoints, de réunion égale à E. (*On dit que les A_i forment une partition de E.*)

Exercice 8. Peut-on trouver une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$?

Exercice 9. On définit la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Montrer que f est une bijection, et déterminer sa réciproque.