Devoir surveillé 1

ECS 1

Samedi 16 septembre 2017, 8h-12h

Dans ce devoir, la clarté et la précision du raisonnement seront primordiales. Les résultats seront encadrés, les pages numérotées, *etc.*

Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le note sur sa copie et poursuit.

Calculatrice autorisée.

Pas de sorties aux toilettes avant 9h. Pas de sortie définitive avant 11h.

1 Une étude de fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{x^2+1} \end{array}$$

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer le tableau de variations de f, et tracer sa courbe représentative.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $f(x) = f(a)$, d'inconnue x. *Attention aux cas particuliers.*
4. Soit g la fonction qui à un réel x associe le plus grand antécédent de $f(x)$ par f. Calculer $g(x)$ pour tout réel x, et tracer sa courbe représentative.

2 Extrait Baccalauréat 2015

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 3x - 3x\ln(x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé et T la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Quelle est la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T ?

Indication : On rappelle que pour une fonction dérivable g, la tangente à la courbe de g au point d'abscisse a a pour équation $y = g'(a)(x-a) + g(a)$.

3 Une équation trigonométrique

On considère l'équation (E) d'inconnue $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ définie par

$$\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} = 1 \tag{E}$$

On propose deux méthodes pour résoudre cette équation (les parties A et B sont donc indépendantes).

(A) 1. Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

2. Démontrer alors que l'équation E est équivalente à l'équation

$$\sqrt{\cos(x)\sin(x)}\left(2\cos(x)+3\sqrt{\cos(x)\sin(x)}+2\sin(x)\right)=0 \tag{E'}$$

3. En distinguant les cas $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ et $x\in]0,\frac{\pi}{2}[$, montrer que

$$\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ 2\cos(x)+3\sqrt{\cos(x)\sin(x)}+2\sin(x)>0.$$

4. En déduire les solutions de E.

(B)
1. Démontrer que pour tout $a\in]0,1[$, $\sqrt{a}>a^2$.
2. En déduire que si $x\in]0,\frac{\pi}{2}[$, $\sqrt{\cos(x)}+\sqrt{\sin(x)}>1$.
3. Retrouver les solutions de E.

4 Des inégalités

1. Démontrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^x\geqslant 1+x$. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}^+$,

$$e^x\geqslant\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

2. Montrer que

$$\forall a,b\in\mathbb{R}^{+*},\ \frac{1}{2}\left(\ln(a)+\ln(b)\right)\leqslant\ln\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

En déduire que $\forall x,y\in]1,+\infty[$,

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\geqslant\sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

5 Sinus cardinal

On considère la fonction *sinus cardinal* définie sur $\mathcal{D}=]-\pi,0[\cup]0,\pi[$ par

$$f(x)=\frac{\sin(x)}{x}.$$

1. Montrer que la fonction f est paire.
2. Montrer que la dérivée de f est

$$f'(x)=\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}.$$

3. Donner le tableau de variations de f.
4. Montrer que pour tout $x>0$,

$$x-\frac{x^3}{6}\leqslant\sin(x)\leqslant x.$$

5. En déduire la limite quand x tend vers 0 de $\frac{\sin(x)}{x}$.
6. On note toujours f la fonction

$$f:\begin{array}{ccl}]-\pi,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \begin{cases}\frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}\end{array}$$

On admet que cette fonction est continue.
Montrer que pour tout $x\in]-\pi,\pi[$,

$$f(x)\geqslant 1-\frac{x^2}{6}.$$

7. Donner les valeurs de $f(\pi)$ et $f(-\pi)$, puis tracer la fonction f, et la courbe de la fonction $x\mapsto 1-\frac{x^2}{6}$.