Devoir surveillé 1

ECS 1

Samedi 16 septembre 2017, 8h-12h

Dans ce devoir, la clarté et la précision du raisonnement seront primordiales. Les résultats seront encadrés, les pages numérotées, *etc.*

Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le note sur sa copie et poursuit.

Calculatrice autorisée.

Pas de sorties aux toilettes avant 9h. Pas de sortie définitive avant 11h.

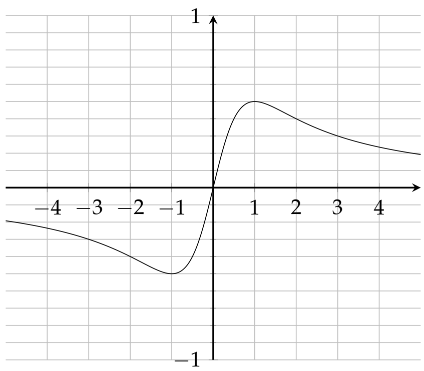
1 Une étude de fonction

1. Pour tout réel x, $x^2 + 1 \geqslant 1 > 0$.
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}.$$

On en déduit le tableau de variations et la courbe de f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Variations de f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0



3. Soit $a \in \mathbb{R}$. On a alors $f(x) = f(a)$ si et seulement si $ax^2 + a = a^2x + x$, *i.e.* $ax^2 - (a^2+1)x + a = 0$.

Si $a = 0$: Dans ce cas, il n'y a qu'une solution $x = 0$.

Si $a \neq 0$: On calcule le discriminant $\Delta = (a^2+1)^2 - 4a^2 = (a^2-1)^2 \geqslant 0$.

Si $a = 1$: Il n'y a qu'une solution, $x = 1$

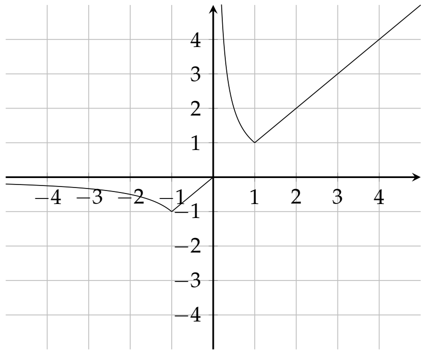
Si $a = -1$: Il n'y a qu'une solution, $x = -1$

Si $a < -1$ ou $a > 1$: On a alors $\sqrt{\Delta} = a^2 - 1$, et les solutions sont $x = a$ et $x = \frac{1}{a}$.

Si $-1 < a < 1$: On a alors $\sqrt{\Delta} = 1 - a^2$, et les solutions sont $x = a$ et $x = \frac{1}{a}$.

4. On a donc plusieurs cas :

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ -1 & \text{si } x = -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases} \end{array}$$



2 Extrait Baccalauréat 2015

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, et sa dérivée est pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$

$$f'(x) = 3 - 3\ln(x) - 3 = -3\ln(x).$$

Au point d'abscisse 1, on a donc l'équation de la tangente : $y = 3$. On veut étudier le signe de $g = f - 3$: g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, et $g'(x) = -3\ln(x)$. g est donc croissante sur $]0,1[$ et décroissante sur $]1,+\infty[$.

On a de plus $\lim_{x\to 0} g(x) = -3$, $g(1) = 0$ et $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$. Donc g est partout négative, et donc f est en-dessous de la tangente au point d'abscisse 1.

3 Une équation trigonométrique

On considère l'équation (E) d'inconnue $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ définie par

$$\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} = 1 \tag{E}$$

(A)
1. On développe le carré deux fois :

$$(a+b)^4 = (a^2+2ab+b^2)^2 = a^4 + 4a^2b^2 + b^4 + 4a^2ab + 4abb^2 + 2a^2b^2 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

2. On élève l'équation à la puissance 4 :

$$\sqrt{\cos(x)}^4 + 4\sqrt{\cos(x)}\sqrt{\sin(x)} + 6\sqrt{\cos(x)\sin(x)}^2 + 4\sqrt{cos(x)}\sqrt{sin(x)}^3 + \sqrt{sin(x)}^4 = 1.$$

En simplifiant un peu, on obtient bien le résultat voulu.

3. C'est vrai pour $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$, et si $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(x) > 0$, $\sqrt{\cos(x)\sin(x)} > 0$ et $\sin(x) > 0$.
4. Il faut et il suffit donc que le premier facteur de l'équation **??** soit nul, c'est-à-dire $\cos(x) = 0$ ou $\sin(x) = 0$. Les solutions sont donc 0 et $\frac{\pi}{2}$.

(B)
1. Ce sont des nombres positifs, et donc on peut élever au carré l'inégalité à montrer : on veut montrer que $a > a^4$. Or $a^4 - a = a(a^3-1) = a(a-1)(1+a+a^2)$, qui est négatif.
2. Si $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a bien $\cos(x), \sin(x) \in]0,1[$. Donc d'après la question précédente, $\sqrt{\cos(x)} > \cos(x)^2$ et $\sqrt{\sin(x)} > \sin(x)^2$.
Donc $\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} > \cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$.
3. Les solutions ne peuvent donc être que 0 et $\frac{\pi}{2}$, et réciproquement, on vérifie que ce sont bien des solutions.

4 Des inégalités

1. On pose $\varphi(x) = e^x - x - 1$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\varphi'(x) = e^x - 1$. Or pour tout $x > 0$, $e^x > 1$, et pour tout $x < 0$, $e^x < 1$, donc φ est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, \infty[$. Comme $\varphi(0) = 0$, φ est positive sur $\mathbb{R}$.

   En appliquant ce résultat à $\frac{x}{n}$, on obtient $e^{\frac{x}{n}} \geqslant 1 + \frac{x}{n}$, et il suffit d'élever à la puissance n (fonction croissante).

2. Déjà vu en TD. En appliquant l'inégalité AM-GM vue en TD, on obtient tout de suite le résultat.

5 Sinus cardinal

1. $x \mapsto x$ et sin sont impaires, donc leur quotient est pair.

2. On applique la formule de dérivation d'un quotient pour obtenir directement le résultat.

3. Le dénominateur de $f'(x)$ étant positif, on étudie le signe du numérateur. On pose donc la fonction $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\cos(x) - \sin(x) \end{array}$.

   φ est dérivable sur $\mathcal{D}$, et pour tout $x \in \mathcal{D}$,

   $$\varphi'(x) = \cos(x) - x\sin(x) - \cos(x) = -x\sin(x).$$

   D'où le tableau de variations de φ :

x	$-\pi$	0	π
Signe de $\varphi'(x)$		$-$	
Variations de φ	π	0	$-\pi$

   φ est donc positive entre $-\pi$ et 0, et négative entre 0 et π. Donc, sur ces intervalles respectifs, f est croissante puis décroissante.

4. On a déjà vu en TD $\sin(x) \leqslant x$. Pour l'autre, on considère la fonction $\varphi : x \mapsto \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$. Elle est dérivable, de dérivée $\varphi'(x) = \cos(x) - (1 - \frac{x^2}{2})$.

   On a vu en TD que $\cos(x) > 1 - \frac{x^2}{2}$, et donc φ est croissante. Comme $\varphi(0) = 0$, on a bien le résultat.

5. En divisant par x dans l'inégalité précédente (attention à différencier les cas $x > 0$ et $x < 0$), on trouve le résultat par théorème d'encadrement des limites.

6. Le cas $x > 0$ a été traité à la question 4. Le cas $x < 0$ s'en déduit par imparité de f et parité de $1 - \frac{x^2}{6}$. Pour $x = 0$, c'est évident.

7. On a $f(-\pi) = f(\pi) = 0$.