Chapitre 10

Fonctions de plusieurs variables

Dans tout ce chapitre, on travaillera sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$: il sera donc muni de son produit scalaire canonique, et de la normée associée.

10.1 Fonctions définitions sur $\mathbb{R}^n$

Définition 10.1.1
Soit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$. *On appelle* fonctions à n variables *toute fonction définie sur* $\mathcal{D}$ *à valeur dans* $\mathbb{R}$. *On notera*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & f(x_1, \ldots, x_n) \end{array} .$$

EXEMPLE

La fonction

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \frac{xy}{x^2+y^2} \end{array}$$

est une fonction de deux variables.

Définition 10.1.2
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction à* n *variables, et soit* $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. *On appelle* i*-ème fonction partielle de* f *en* a *la fonction*

Définition 10.1.3
On appelle fonction polynomiale à n variables *toute fonction à* n *variables combinaison linéaire de fonctions de la forme*

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \qquad\qquad .$$

EXEMPLE

Les fonctions $(x,y) \mapsto x^2 + xy + y^2$, $(x,y,z) \mapsto x^2 + zy^4 - 7xy$ et $(x_1,\dots,x_n) \mapsto \prod_{i=1}^n x_i$ sont des fonctions polynomiales à , et variables respectivement.

Définition 10.1.4
Parmi les fonctions polynomiales, on distingue les fonctions affines qui sont de la forme

$$(x_1,\dots,x_n) \mapsto$$

EXEMPLE

La fonction $(x,y,z) \mapsto 2x - 3y + z - 1$ est une fonction affine.

10.1.1 Représentation graphiques des fonctions de plusieurs variables

Soit f une fonction à n variables définie sur $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Définition 10.1.5
On appelle graphe de f *le sous-ensemble de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *défini par*

$\mathcal{G}_f =$

NOTA

On note que pour une fonction d'une seule variable, son graphe est une partie de $\mathbb{R}^2$; il est donc facile de le représenter.
Pour une fonction de deux variables, le graphe est une partie de $\mathbb{R}^3$. Sa représentation est donc possible, bien que difficile à dessiner.
Pour plus de trois variables, le graphe est une hypersurface en dimension au moins 4. On ne peut alors pas le représenter sur une feuille.

NOTA

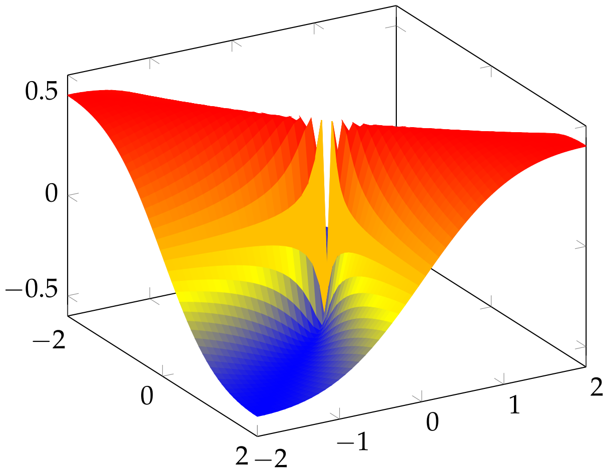
On sait déjà tracer le graphe d'une fonction d'une seule variable. On ne dessinera donc que des graphes de fonctions à deux variables.

EXEMPLE

Le graphe de la fonction

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{xy}{x^2+y^2} \end{array}$$

est donné par

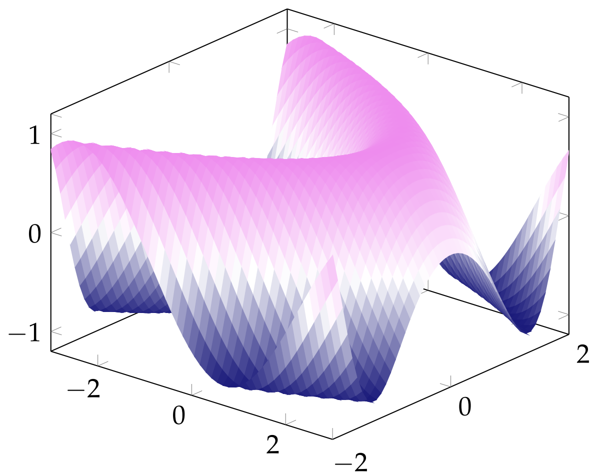


EXEMPLE

Le graphe de la fonction

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sin(x+y^2) \end{array}$$

est donné par



Proposition 10.1.6 : Graphe d'une fonction affine
Le graphe d'une fonction affine à deux variables est un plan dans R^3.

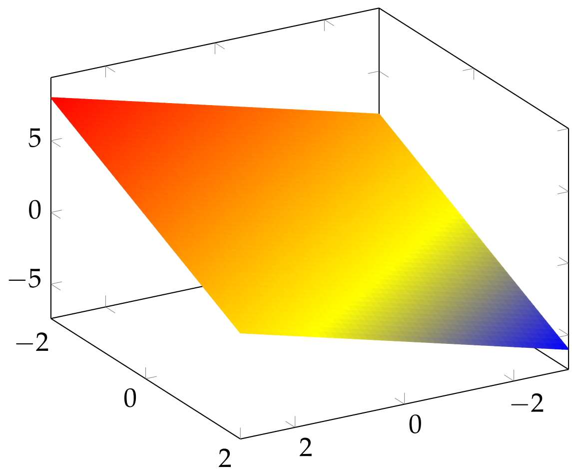
Démonstration. Une fonction affine à deux variables est donnée par
Le graphe est donc la surface d'équation , et on reconnaît une équation de plan. □

EXEMPLE

Le graphe de la fonction

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x - 2y + 1 \end{array}$$

est donné par



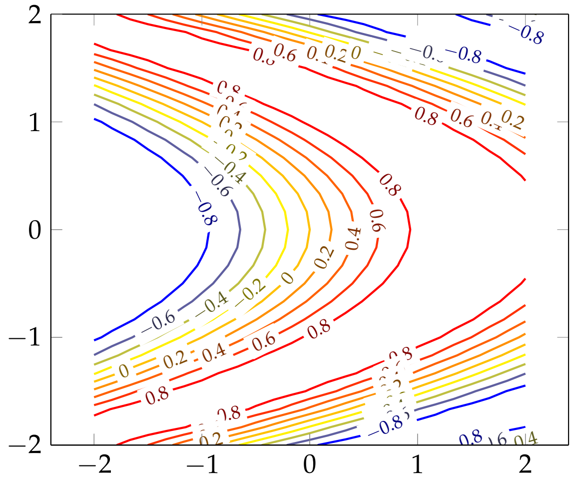
Définition 10.1.7
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle ligne de niveau λ *de f l'ensemble*

EXEMPLE

Pour la fonction

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sin(x+y^2) \end{array},$$

on a les lignes de niveaux



NOTA

Sur les cartes topographiques, on peut voir apparaître les lignes de niveaux correpondant à l'altitude ; si on marche en restant sur un même ligne de niveau, on ne monte ni ne descend.

10.2 Fonctions continues

On fixe une fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 10.2.1
Soit $a \in \mathbb{R}^n$. *On dit que* f est continue en a *si*

On dit que f *est continue sur* $\mathbb{R}^n$ *si*

NOTA

On retrouve la définition de fonctions continue en a à une seule variable : si x est assez proche de a, alors $f(x)$ est proche de $f(a)$.

NOTA

Attention ! Pour montrer la continuité d'une fonction, il ne suffit de montrer que les fonctions $f_i : x_i \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$ sont continues.

EXERCICE

Montrer que la fonction

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{xy}{x^2+y^2} \end{array}$$

n'est pas continue en $(0,0)$, mais que $x \mapsto f(x,0)$ et $y \mapsto f(0,x)$ le sont.

Proposition 10.2.2
Les applications coordonnées $p_i : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ sont continues sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Soit donc $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $\eta =$. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x - a\| \leqslant \eta$. On a alors

$$\begin{aligned} |p_i(x) - p_i(a)| &= \\ &\leqslant \\ &= \\ &\leqslant \end{aligned}$$

□

Proposition 10.2.3
Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue et $a \in \mathbb{R}^n$, alors

Démonstration. Soit donc $\varepsilon > 0$. f est continue en a, donc

$$\exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|x - a\| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon.$$

Soit x_i tel que $|x_i - a_i| \leqslant \eta$. On a alors

$$\begin{aligned} &\|(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, x_n) - (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, x_n)\| \\ &= \\ &= \\ &\leqslant \end{aligned}$$

Donc par définition de continuité de f, □

Proposition 10.2.4 : Opérations sur les fonctions continues
Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f et g sont continues en $a \in \mathbb{R}^n$ (resp. sur $\mathbb{R}^n$), alors

- *λf est continue en a (resp. sur $\mathbb{R}^n$)*
- *$f + g$ est continue en a (resp. sur $\mathbb{R}^n$)*
- *$f \times g$ est continue en a (resp. sur $\mathbb{R}^n$)*
- *si g ne s'annule pas, $\frac{f}{g}$ est continue en a (resp. sur $\mathbb{R}^n$)*

- *si f prend ses valeurs dans un intervalle I, et si $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est continue en $f(a)$ (resp. sur I), alors $\varphi \circ f$ est continue en a (resp. sur $\mathbb{R}^n$).*

Corollaire 10.2.5
Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Il suffit de voir qu'une fonction polynomiale s'écrit nécessairement comme

□

EXEMPLE

La fonction "norme" est continue sur $\mathbb{R}^n$. On a en effet par définition

$$\|x\| =$$

La fonction $x \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k^2$ est polynomiale, donc continue, et la fonction $\sqrt{\cdot}:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est continue.

10.3 Calcul différentiel

On fixe une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

10.3.1 Dérivées partielles

Définition 10.3.1
On dit que f admet une i-ième dérivée partielle en $a \in \mathbb{R}^n$ si la fonction partielle f_i est dérivable, i.e. *si*

existe. Dans ce cas, on note $\partial_i f(a)$ cette limite.

Si f admet une i-ième dérivée partielle en tout point de $\mathbb{R}^n$, alors on appelle i-ième dérivée partielle de f la fonction

$$\partial_i : a \mapsto$$

NOTA

Trouver une dérivée partielle consiste donc à trouver la dérivée d'une fonction d'une seule variable, toutes les autres variables étant considérées comme des constantes. Les règles de dérivation apprises en première année reste donc valable.

NOTATION – On pourra voir la notation $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ au lieu de $\partial_i f(a)$.

EXEMPLE

Reprenons $f(x,y) = \sin(x+y^2)$. Alors f admet des dérivées partielles, et

$\partial_1 f(x,y) =$ et $\partial_2 f(x,y) =$

Proposition 10.3.2
Les fonctions poynomiales admettent des dérivées partielles en toutes leurs variables.

Définition 10.3.3
Soit $a \in \mathbb{R}^n$. On suppose que f admet une i-ième dérivée partielle pour tout i. On appelle alors gradient de f en a, *noté $\nabla f(a)$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$*

$$\nabla f(a) =$$

EXEMPLE

Pour la fonction de l'exemple précédent, on a donc

$$\nabla f(x,y) =$$

10.3.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 10.3.4
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ si

Proposition 10.3.5 : Opérations sur les fonctions $\mathcal{C}^1$
Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, alors

- *λf de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$*
- *$f + g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$*
- *$f \times g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$*
- *si g ne s'annule pas, $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$*

- *si f prend ses valeurs dans un intervalle I, et si $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, alors $\varphi \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.*

Corollaire 10.3.6
Les fonction polynomiales sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

EXERCICE

Montrer que la fonction "norme" n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

Comme pour les fonctions d'une seule variable, on a la formule de Taylor à l'ordre 1 :

Théorème 10.3.7 : Formule de Taylor à l'ordre 1
On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Alors

où ε est une fonction $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue en 0 avec $\varepsilon(0) = 0$.

EXERCICE

Écrire cette formule pour une fonction de deux variables.

Corollaire 10.3.8
Toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ est continue.

Démonstration. On écrit la formule de Taylor :

$$f(x+h) = f(a) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \|h\| \varepsilon(h).$$

On a alors

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &= \\ &\leqslant \\ &\leqslant \\ &\leqslant \end{aligned}$$

La fonction $h \mapsto \|h\|(\|\nabla f(x)\| + |\varepsilon(h)|)$ est continue en 0, par opération sur les fonctions continues. Donc, pour $\|h\|$ assez petit, on a

et donc f est continue en x. $\square$

10.3.3 Dérivées directionnelles

Définition 10.3.9
Soient $a \in \mathbb{R}^n$ *et* $u \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. *On appelle* droite de direction u passant par a *l'ensemble*

NOTA

Quelque soit le vecteur $v \in \mathrm{Vect}(u)$ la droite passant par a de direction v est la même que celle de direction u.

Proposition 10.3.10
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$. *Soient* $x, u \in \mathbb{R}^n$, *et* g *la fonction* $t \mapsto f(x + tu)$.

Alors g *est de classe* $\mathcal{C}^1$, *et*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g'(t) =$$

Démonstration. Soient donc $t, h \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\begin{aligned} g(t+h) &= \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

où ε est une fonction continue en 0, qui vaut 0 en 0.

On a donc

$$\frac{g(t+h) - g(t)}{h} =$$

Quand $h \to 0$, on a $\frac{|h|}{h} \|u\| \varepsilon(hu) \to 0$, et on retrouve donc bien la formule cherchée. □

NOTA

On aimerait que la dérivée de g en 0 représente la vitesse de variation de f autour du point x selon la direction de u.
Le problème ici est qu'en choisissant un autre vecteur $v \in \mathrm{Vect}(u)$, cette valeur change, alors que la droite passant par x de direction v reste la même. On utilise donc la définition :

Définition 10.3.11
Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a, u \in \mathbb{R}^n$ *avec* u *unitaire. On appelle* dérivée directionnelle de f en a de direction u *la dérivée en* 0 *de la fonction* $t \mapsto f(a + tu)$, *si elle existe.*

EXEMPLE

Soit $f(x,y) = \sin(x+y^2)$. Soient $a = (0,0)$ et $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$. Alors :

$$g(t) = f(a+tu) =$$

En dérivant par rapport à t, on obtient donc la dérivée directionnelle de f en a de direction u :

$g'(t) =$

Proposition 10.3.12
Si elles existent, les dérivées directionnelles de direction les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ sont exactement les dérivées partielles.

Proposition 10.3.13
Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors f admet une dérivée directionnelle en a de direction u égale à

NOTA

Soit u unitaire. Alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne

$$|\langle \nabla f(a), u \rangle| \leqslant \|\nabla f(a)\|,$$

avec égalité si et seulement si u et $\nabla f(a)$ sont colinéaires.
Le gradient est donc la direction qui maximise la variation de f.

NOTA

On peut aussi montrer que la direction qui maximise la variation de f en un point est celle qui est orthogonale aux lignes de niveau de f.
On peut donc en déduire que le gradient d'une fonction est toujours orthogonal aux lignes de niveaux.

10.4 Recherche d'extrema

On fixe une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 10.4.1
Soit $a \in \mathbb{R}^n$.

- *On dit que f admet un maximum (resp. minimum) global en a si*

- *On dit que f admet un maximum (resp. minimum) local en a si*

Théorème 10.4.2 : Condition nécessaire du premier ordre
Si f admet un extremum local en $a \in \mathbb{R}^n$, alors

Démonstration. Supposons par exemple que f admette un maximum en a. Si e_i est le i-ième vecteur de la base canonique, la fonction $t \mapsto f(a + te_i)$ admet un maximum en 0, et donc sa dérivée s'annule en 0. Mais cette dérivée est exactement $\partial_i f(a)$. □

NOTA

Attention, comme pour les fonctions d'une seule variable, la réciproque est fausse.

Définition 10.4.3
Un point a pour lequel $\nabla f(a) = 0$ s'appelle

NOTA

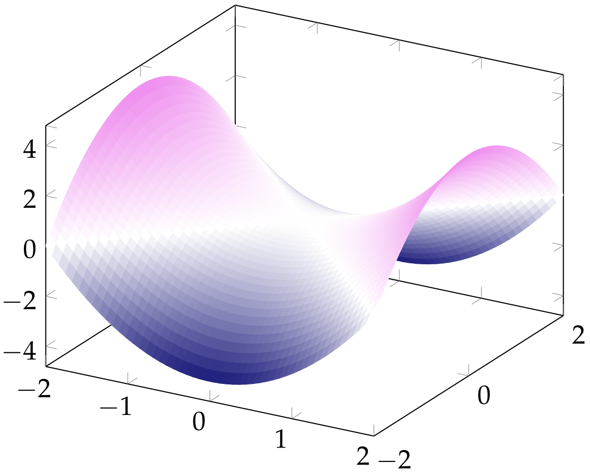
Le théorème nous dit donc que tout extremum de f est un point critique. La réciproque est fausse : étant donné un point critique, il est en général difficile de savoir si c'est un maximum, un minimum, ou ni l'un ni l'autre.

EXERCICE

Montrer que la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 - y^2 \end{array}$$

admet un point critique qui n'est pas un extremum.


4
2
0
−2
−4
−2
−1
0
1
2
−2
0
2

10.5 Exercices

Exercice 1. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est continue.

Exercice 2. Soient $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue et $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon $R > 0$. On considère la fonction $f : t \mapsto g(R\cos(t), R\sin(t))$.

a) Montrer qu'il existe deux points A et B de $\mathcal{C}$ diamétralement opposés tels que $g(A) = g(B)$.

b) Montrer qu'il existe deux points C et D de $\mathcal{C}$, se déduisant l'un de l'autre par un quart de tour tels que $g(C) = g(D)$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Montrer que pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, $|f(x,y,z)| \leqslant |yz|$, et en déduire que f est continue sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. On définit la fonction

$$f : \begin{array}{ccc}]0,\infty[^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{(x+y)^2}{xy} \end{array}.$$

a) Montrer que pour tous $x, y \in]0,\infty[$, $f(x,y) \geqslant 4$.

b) Montrer que f admet un minimum global. Préciser sa valeur, et les points en lequel il est atteint.

Exercice 5. Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^1$, et calculer leur gradient

- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xye^{-x^2+2y} \end{array}$
- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & xye^z + xze^y + yze^x \end{array}$
- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}. & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & xye^z + xze^y + yze^x(x_1^2 + \cdots + x_n^2)e^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)} \end{array}$

Exercice 6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + xyz + y - z.$$

Déterminer les points critiques de f, et déterminer ses éventuels extrema.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (x^n - y)e^{x-y} \end{array} .$$

(i) Montrer que f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et calculer les dérivées partielles de f_n.

(ii) On se place dans le cas $n = 2$.

a. Montrer que f_2 admet un unique point critique.

b. Montrer que ce point est bien un extremum dont on précisera la nature.

(iii) On se place dans le cas $n = 1$.

a. Montrer qu'il existe une infinité de points en lequels le gradient de f_1 s'annule.

b. Montrer qu'en ces points, la fonction f_1 admet un minimum.

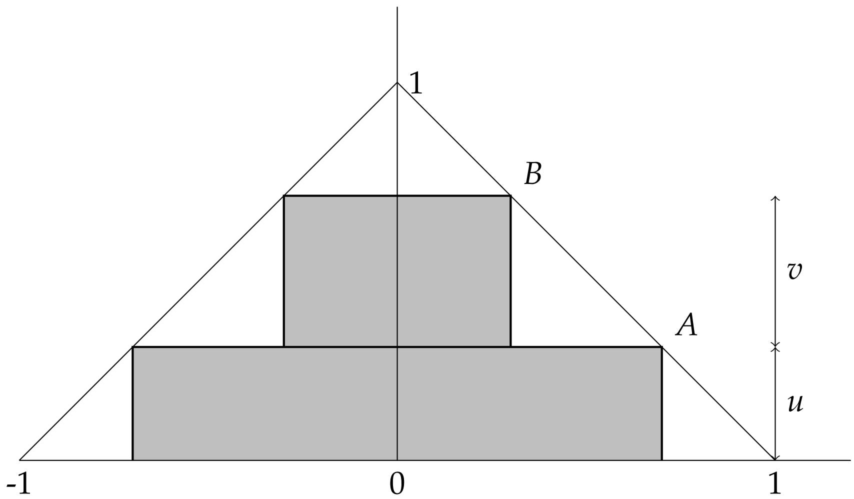
Exercice 8. Étudier les extrema de

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^3 + xy + y^3 \end{array} .$$

Exercice 9. Étudier les extrema de

$$f : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_+^*)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{xy}{(1+x^2)(1+y^2)} \end{array} .$$

Exercice 10. On considère la surface grisée :



Déterminer u et v pour que cette surface soit maximale.

Exercice 11. Soient $\mathcal{C}_1$ la parabole d'équation $y = x^2$ et $\mathcal{C}_2$ la droite d'équation $y = x - 1$. Trouver deux points $M \in \mathcal{C}_1$ et $N \in \mathcal{C}_2$ tels que la distance MN soit minimale.