Chapitre 11

Vecteurs aléatoires

Dans ce chapitre, nous généraliserons certains résultats montrés pour des couples de variables aléatoires discrètes ou à densité.

On se fixe un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

11.1 Indépendance mutuelle

Définition 11.1.1
Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements. On dit que les A_i sont mutuellement indépendants * *si pour tous $k \leqslant \mathrm{Card}(I)$ et $i_1, \ldots, i_k \in I$,*

Proposition 11.1.2
L'indépendance mutuelle entraîne l'indépendance deux à deux. La réciproque est fausse.

Démonstration. Le résultat direct est évident. Pour la réciproque, on considère l'expérience suivante : on lance deux dés équilibrés à six faces, et on note

- A_1 l'événement "le résultat du premier dé est pair"
- A_2 l'événement "le résultat du second dé est pair"
- A_3 l'événement "la somme des deux dés est impaire".

Il est alors clair que , mais

∗. ou simplement "indépendants" ; attention à ne pas confondre avec l'indépendance deux à deux

En revanche, $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) =$, de sorte que les A_i sont indépendants deux à deux. □

Définition 11.1.3
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires. On dit que les X_i sont mutuellement indépendants *si pour tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$,*

Proposition 11.1.4
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires. Alors les X_i sont mutuellement indépendantes si et seulement si pour tous intervalles de $\mathbb{R}$ $I_1, \ldots, I_n$,

En particulier, si les X_i sont mutuellement indépendantes, alors elles sont indépendantes deux à deux (la réciproque est fausse).

Proposition 11.1.5
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes. Alors les X_i sont mutuellement indépendantes si et seulement si

Lemme 11.1.6 : de coalition
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes. Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$. Soient deux fonctions $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^{n-p} \to \mathbb{R}$.

Alors

NOTA

Attention, si ce résultat est en apparence évident, il est en fait assez subtil. Il faut donc penser à le citer chaque fois qu'on l'utilise.

11.2 Loi d'un vecteur aléatoire, lois marginales

De la même façon qu'on a définit des couples de variables aléatoires, on peut définir des vecteurs de variables aléatoires.

Définition 11.2.1
Soient $X_1, \ldots, X_n$ *des variables aléatoires. Le* vecteur aléatoire $(X_1, \ldots, X_n)$ *est la fonction*

Étudier un vecteur aléatoire, c'est donc étudier *simultanément* toutes les variables aléatoires qui le composent.

Définition 11.2.2
On appelle loi du vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$ *la donnée de la fonction de répartition définie sur* $\mathbb{R}^n$ *par*

On peut alors reformuler l'indépendance mutuelle de variables aléatoires :

Proposition 11.2.3
Les variables $X_1, \ldots, X_n$ *sont mutuellement indépendantes si et seulement si la fonction de répartition du vecteur* $(X_1, \ldots, X_n)$ *est le produit des fonctions de répartition des* X_i*,* i.e.

Proposition 11.2.4
Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ *et* $(Y_1 \ldots, Y_n)$ *deux vecteurs aléatoires de même loi. Alors pour toute fonction continue* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*,*

Définition 11.2.5
Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ *un vecteur aléatoire réel. On appelle* k*-ième loi marginale de ce vecteur la loi de* X_i*.*

NOTA

Dans le cas de deux vecteurs, on retrouve la définition de lois marginales d'un couple.

Comme dans le cas $n = 2$, la loi du vecteur permet de calculer les lois marginales, mais les lois marginales ne suffisent en général pas à déterminer la loi du vecteur. On le peut cependant dans le cas d'indépendance mutuelle.

Proposition 11.2.6
Soit $(X_1, \dots, X_n)$ *un vecteur aléatoire réel. Alors la* k*-ième loi marginale est donnée par la fonction de répartition*

11.2.1 Cas des variables discrètes

Si toutes les variables X_i sont discrètes, on dit que le vecteur $(X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur aléatoire discret.

Proposition 11.2.7
La loi du vecteur discret $(X_1, \dots, X_n)$ *est entièrement déterminée par la donnée de*

pour tous $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$.

Comme dans le cas des couples, on peut alors retrouver les lois marginales

Proposition 11.2.8
La k*-ième loi marginale du vecteur discret* $(X_1, \dots, X_n)$ *est donnée par*

$\forall x_k \in X_k(\Omega),\ P(X_k = x_k) =$

11.3 Espérance et variance

Proposition 11.3.1 : Linéarité de l'espérance
Soient $X_1, \dots, X_n$ *des variables aléatoires admettant toutes une espérance. Alors pour tous* $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$*, la variable* $\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n$ *admet un espérance, et*

$$E(\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n) =$$

EXERCICE

Prouver ce résultat par récurrence.

Proposition 11.3.2
Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires admettant toutes une espérance. Alors si les X_i sont mutuellement indépendantes, alors $X_1 \times \cdots \times X_n$ admet un espérance, et

$$E(X_1 \times \cdots \times X_n) =$$

Démonstration. On le fait par récurrence.

- Si $n = 2$, on a déjà vu le résultat †.
- On suppose le résultat vrai pour toutes n variables aléatoires. Soient $X_1, \dots, X_{n+1}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes admettant une espérance.

  Par le lemme de coalition, $X_1 \cdots X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes, et admettent une espérance par l'hypothèse de récurrence. Alors, par le cas $n = 2$, $X_1 \cdots X_{n+1}$ admet une espérance, et

$$\begin{aligned} E(X_1 \cdots X_{n+1}) &= \\ &= \end{aligned}$$

□

Proposition 11.3.3
Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires admettant toutes une variance. Alors si les X_i sont mutuellement indépendantes, alors $X_1 + \cdots + X_n$ admet une variance, et

$$V(X_1 + \cdots + X_n) =$$

11.4 Sommes de variables aléatoires mutuellement indépendantes

Proposition 11.4.1 : Stabilité par somme de la loi binomiale
Soient $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(k_1, p), \cdots, X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(k_n, p)$ mutuellement indépendantes. Alors

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow$$

En particulier, la somme de n variables de Bernoulli de paramètre p mutuellement indépendantes suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Démonstration. Par récurrence, en connaissant déjà le cas $n = 2$. □

†. On a en fait vu le résultat pour des variables discrètes ou à densité. Dans les autres cas, on l'admet.

Proposition 11.4.2 : Stabilité par somme de la loi de Poisson
Soient $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1), \cdots, X_n \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_n)$ *mutuellement indépendantes. Alors*

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow$$

Démonstration. Par récurrence, en connaissant déjà le cas $n = 2$. □

Proposition 11.4.3 : Stabilité par somme de la loi gamma
Soient $X_1 \hookrightarrow \gamma(\nu_1), \cdots, X_n \hookrightarrow \gamma(\nu_n)$ *mutuellement indépendantes. Alors*

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow$$

Démonstration. Par récurrence, en connaissant déjà le cas $n = 2$. □

Corollaire 11.4.4 : Stabilité par somme de la loi exponentielle de paramètre 1
Soient $X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1), \cdots, X_n \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ *mutuellement indépendantes. Alors*

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow$$

Démonstration. Par récurrence, en connaissant déjà le cas $n = 2$. □

EXERCICE À CONNAÎTRE

Soient $X_1, \ldots, X_n$ suivant la loi $\mathcal{E}(\lambda)$, mutuellement indépendantes. Trouver la loi de $X_1 + \cdots + X_n$.

Proposition 11.4.5 : Stabilité par somme de la loi normale
Soient $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1 \sigma_1), \cdots, X_n \hookrightarrow \mathcal{N}(m_n, \sigma_n)$ *mutuellement indépendantes. Alors*

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow$$

En particulier, la somme de n variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi normale centrée réduite suit un loi

Démonstration. Par récurrence, en connaissant déjà le cas $n = 2$. □

11.5 Exercices

Exercice 1. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

Montrer que $\min(X_1, \dots, X_n)$ est une variable à densité, et donner sa densité.

Exercice 2. Soient X_1, X_2, X_3 trois variables mutuellement indépendantes de loi $\mathcal{E}(5)$.

Déterminer la loi de $5(X_1 + X_2 + X_3)$, puis en déduire une densité de $X_1 + X_2 + X_3$.

Exercice 3. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire tel que chaque X_i admette un moment d'ordre 2. On appelle *matrice de dispersion* la matrice D où $d_{i,j} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.

Montrer que la matrice D est symétrique, puis que pour tout vecteur colonne A, ${}^{\mathbf{t}}ADA \geqslant 0$.

Exercice 4. On cherche à étudier la reprodution d'un certain insecte. Notons N la variable aléatoire comptant le nombre d'œufs pondus par cet insecte. On suppose que $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Chaque œuf pondu éclot avec une probabilité p : notons $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

On suppose que les variables $N, X_1, X_2, \dots$ sont mutuellement indépendantes, et on note D le nombre de descendants de l'insecte.

(i) Exprimer D en fonction de N et des X_i.

(ii) Calculer pour tous entiers n et d la probabilité $P_{[N=n]}(D = d)$.

(iii) En déduire la loi du couple (D, N), puis la loi de D.

Exercice 5. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{i}.$$

(i) Vérifier que pour tout x,

$$\int_0^x n e^{nt} (1 - e^{-t})^{n-1} \mathrm{d}t = (e^x - 1)^n.$$

(ii) Déterminer une densité de $\frac{X_{n+1}}{n+1}$; on la note d_{n+1}.

(iii) Montrer par récurrence qu'une densité de Z_n est donnée par

$$f_n : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ n e^{-t} (1 - e^{-t})^{n-1} & \text{si } t > 0 \end{array} \right. \end{array} .$$

Exercice 6. Soient $X_1, \dots, X_n, \dots$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi $\mathcal{P}(1)$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $Z_n = e^{-S_n/n}$.

Déterminer la limite quand $n \to \infty$ de $E(Z_n)$.

Exercice 7. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent la loi exponentielle de paramètre 1. N est une variable aléatoire sur le même espace qui suit une loi géométrique de paramètre p. On suppose que les variables de $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et N sont mutuellement indépendantes.

Donner la fonction de répartition de la variable Y définie par

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \min_{1\leqslant k\leqslant N(\omega)} X_k(\omega).$$

Exercice 8. Soit (X_k) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent la même loi exponentielle de paramètre a.

Soit x un réel strictement positif. Trouver la loi de la variable aléatoire

$$N_x = \begin{cases} 0 & \text{si } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ X_k \leqslant x \\ \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid X_k > x\} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Déterminer la limite $\lim\limits_{x\to\infty} P(N_x > E(N_x))$.