Chapitre 12

Orthogonalité

Dans tout ce chapitre, E désigne un espace euclidien de dimension n, muni de son produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de sa norme associée $\| \cdot \|$.

12.1 Supplémentaire orthogonal

Définition 12.1.1
Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle supplémentaire orthogonal de F*, noté $F^{\perp}$, l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux aux vecteurs de F,* i.e.

Proposition 12.1.2
Pour tout sous-espace vectoriel F, son supplémentaire orthogonal $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Il est clair que . Soient maintenant $x, y \in F^{\perp}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $u \in F$,

$$\langle x + \lambda y, u \rangle =$$

Donc □

Le supplémentaire orthogonal est en fait le plus grand sous-espace vectoriel de E orthogonal à F :

L'orthogonal inverse les inclusions :

Proposition 12.1.3
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

Démonstration. Soit donc $x \in G^{\perp}$, et soit $u \in F$. Alors, comme $u \in G$, ,
et donc □

EXERCICE

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. Déterminer $F^{\perp}$.

On peut aussi caractériser l'orthogonal à l'aide d'une base de F :

Proposition 12.1.4
Soit F un sous-espace vectoriel de E de base $(e_1, \ldots, e_p)$. Alors pour tout $x \in E$,

$$x \in F^{\perp} \Leftrightarrow$$

Proposition 12.1.5
Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors

- $\dim F^{\perp} =$.
- $(F^{\perp})^{\perp} =$.

Démonstration.

- Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de F, qu'on complète en une base orthonormée de E $(e_1, \ldots, e_n)$.

  Montrons que $F^{\perp} = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$. L'inclusion réciproque est évidente : les e_i pour $i \geqslant p + 1$ sont orthogonaux aux e_j pour $j \leqslant p$.

  Soit maintenant $x \in F^{\perp}$. Alors on peut décomposer x en

  $$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

  En exploitant les égalités $\langle x, e_j \rangle = 0$ pour $j \leqslant p$, on obtient $x_j = 0$.

  Finalement, $x \in \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$.

- Soit $x \in F$, et soit $y \in F^{\perp}$. Alors $\langle x, y \rangle = 0$, et donc $x \in (F^{\perp})^{\perp}$.

  De plus, $\dim(F^{\perp})^{\perp} = n - \dim F^{\perp} = n - (n - \dim F) = \dim F$, et donc on a bien l'égalité.

□

Justifions maintenant la dénomination *supplémentaire orthogonal*.

Proposition 12.1.6
Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires dans E, i.e.

Démonstration. On sait déjà que F et $F^\perp$ sont orthogonaux, et donc qu'ils sont en somme directe. De plus,

$$\begin{aligned}\dim(F \oplus F^\perp) &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Donc cette somme est E tout entier. □

Corollaire 12.1.7
La concaténation d'une base orthonormée de F et d'une base orthonormée de $F^\perp$ donne une base orthonormée de E.

Démonstration. En exercice. □

12.2 Projecteurs orthogonaux

On commence par rappeler quelques propriétés des projecteurs.

Définition 12.2.1
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires. On appelle projecteur sur G parallèlement à F *l'endomorphisme de E défini par*

$$p : \begin{array}{ccc} F \oplus G & \longrightarrow & E \\ x + y & \longmapsto & \end{array} .$$

Proposition 12.2.2
Tout endomorphisme p de E tel que $p \circ p = p$ est un projecteur, sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.

Proposition 12.2.3
Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ le projecteur sur G parallèlement à F.

- $p \circ p =$
- $\ker(p) =$ *et* $\mathrm{Im}(p) =$
- $\mathrm{id} - p$ *est le projecteur sur* *parallèlement à*
- *Dans une base adaptée à la somme $F \oplus G = E$, la matrice de p est de la forme*

On va maintenant définir le projecteur orthogonal :

Définition 12.2.4
Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle projecteur orthogonal sur F *la projection sur parallèlement à , notée p_F.*

NOTA

On note qu'en écrivant $x = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in F^{\perp}$, on a

$$p_F(x) = \quad .$$

Proposition 12.2.5
Soit p un projecteur de E. Alors sont équivalentes :

(i) *p est un projecteur orthogonal*

(ii)

(iii)

Pour calculer un projeté orthogonal, on peut utiliser deux méthodes.

Méthode 1 : Utilisation d'une base orthonormée

Si on connaît une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_p)$ de F, on peut directement trouver l'expression de p_F :

$$p_F(x) =$$

EXEMPLE

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. Alors une base orthonormée de F est donnée par $e_1 =$ et $e_2 =$.

Alors pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$p_F(x, y, z) =$

Si on connaît aussi une base orthonormée de E, on peut donner la matrice de la projection orthogonale dans cette base.

Proposition 12.2.6
Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de F. On pose $E_i = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(e_i)$.

Alors la matrice de p_F dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(p_F) =$$

Démonstration. Commençons par remarquer que, en notant $F_i = \mathrm{Vect}(e_i)$, on a

$$p_F =$$

Soient maintenant $x \in E$, $X = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y_i = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(p_{F_i}(x))$. On a alors, par le résultat précédent,

$$Y_i =$$

Mais $\mathcal{B}$ est orthonormée, on peut donc écrire $\langle e_i, x \rangle =$ $\qquad\qquad$ $\in \mathbb{R}$, et alors

$$Y_i =$$

On en déduit donc que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(p_{F_i}) =$ $\qquad\qquad$, et donc le résultat par linéarité. □

EXERCICE

Montrer que la matrice d'un projecteur orthogonal dans une base orthonormée est symétrique.

Méthode 2 : Utilisation d'une base non orthonormée

Si on ne connaît qu'une base non orthonormée, on peut tout de même trouver l'expression du projecteur orthogonal. On décrit la méthode :

- Trouver une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de F

- On sait que $p_F(x) \in F$: on peut donc décomposer

$$p_F(x) =$$

- On sait que $x - p_F(x) \in F^{\perp}$, et donc que

  pour tout $i \in [\![1, p]\!]$

- Résoudre le système obtenu pour trouver les α_i.

EXEMPLE

On considère toujours $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$, muni de la base $e_1 = (1, 0, -1)$ et $e_2 = (1, -1, 0)$.
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On peut écrire $p_F(x) = \alpha e_1 + \beta e_2 =$.
On a alors $(x, y, z) - p_F(x, y, z) =$, et on obtient le système

$$\begin{cases} \langle x - p_F(x), e_1 \rangle & = \\ \langle x - p_F(x), e_2 \rangle & = \end{cases}$$

On doit alors résoudre le système

On trouve alors $\alpha =$ et $\beta =$.

12.2.1 Distance d'un point à un sous-espace

Dans cette partie, on cherche à calculer la distance entre un point et une droite, un plan, *etc.*.

Proposition 12.2.7
Soit $x \in E$, et soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors l'ensemble

admet un minimum, atteint en $u =$.

Définition 12.2.8
Cette distance minimum s'appelle distance de x à F.

Démonstration. Soit $u \in F$. On a alors $x - p_F(x) \in$ et $p_F(x) - u \in$, et donc par le théorème de Pythagore

$\|x - u\|^2 =$

On a donc bien $\|x - u\| \geqslant \|x - p_F(x)\|$, avec égalité si et seulement si $u = p_F(x)$. □

12.2.2 Théorème des pseudos-solutions

On se place maintenant dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique $\langle X, Y \rangle = {}^{\mathbf{t}}XY$.

Proposition 12.2.9
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ de rang $p \geqslant 1$, et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors il existe un unique vecteur $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ minimisant

Démonstration. Considérons l'application linéaire

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$$

et posons $F = \mathrm{Im}(f)$.

Alors

De plus, comme f est injective ($\dim(\ker f) =$), il existe un unique X_0 tel que □

NOTA

Ce théorème nous dit que, si un système $AX = B$ n'a pas de solution, on peut toujours trouver un unique X_0 qui se rapproche le plus de cette solution, au sens des moindres carrés (*i.e.* au sens de la norme canonique).
On peut donner la formule permettant de calculer X_0 :

$$X_0 = ({}^{\mathbf{t}}AA)^{-1}AB.$$

Ce résultat nous permettra de définir la *droite des moindres carrés* qui permet d'approximer un nuage de points par une droite.

12.3 Exercices

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, déterminer $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)^\perp$ où $e_1 = (1, 1, 0, -2)$ et $e_2 = (0, 1, 3, 2)$.

Exercice 2. Montrer que pour tous sous-espaces vectoriels F et G de E,

$$(F \cup G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp.$$

Exercice 3. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des supplémentaires orthogonaux.

Exercice 4. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall x, y \in E,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle.$$

Montrer que $(\ker f)^\perp = \mathrm{Im} f$.

Exercice 5. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E, et soit $u \in E$. Donner la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(u)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 6. Soient $x, y \in E$ non nuls. Donner une condition nécessaire et suffisante sur x et y pour que le projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Vect}(y)$ soit égal au projeté orthogonal de y sur $\mathrm{Vect}(x)$.

Exercice 7. On consdière le sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^4$

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z = 0\}.$$

On note p la projection orthogonale sur F, et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On veut trouver la matrice de p dans $\mathcal{B}$ de deux manières différentes.

a) Méthode 1 :
   (i) Déterminer une base de F, et en déduire une base orthonormée de F.
   (ii) En déduire la matrice cherchée.

a) Méthode 2 :
   (i) Déterminer une base de $F^\perp$, et en déduire une base orthonormée de $F^\perp$.
   (ii) On note q la projection orthogonale sur $F^\perp$. Déterminer la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$.
   (iii) Donner une relation liant p et q, et en déduire la matrice cherchée.

Exercice 8. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y + z = 0\}.$$

Déterminer la distance entre $(0, 0, 1)$ et F.

Exercice 9. Soit $\varphi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(P,Q) = \int_0^{\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t.$$

(i) Montrer que φ est bien définie, et que c'est un produit scalaire.

(ii) Calculer pour tout n

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t.$$

En déduire la valeur de $\varphi(X^p, X^q)$.

(iii) Déterminer

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{\infty} e^{-t}(t^2 - at - b)^2\mathrm{d}t.$$

Exercice 10. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ de son produit scalaire canonique, et on pose $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0$.

(i) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $R_n[X]$.

(ii) Déterminer $F^{\perp}$.

(iii) Soit p la projection orthogonale sur F. Déterminer la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 11. Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. Soit (a,b) une famille orthonormée de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ définie par

$$\forall x \in E,\ f(x) = \langle x, a\rangle b - \langle x, b\rangle a.$$

(i) Montrer que $\mathrm{Im} f = (\ker f)^{\perp}$.

(ii) f est-elle diagonalisable ?