Chapitre 13

Théorèmes de convergences

Dans tout ce chapitre, les variables aléatoires seront des variables aléatoires discrètes ou à densité, définies sur un espace probabilisé fixé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

13.1 Convergence en probabilité

13.1.1 Deux inégalités

Proposition 13.1.1 : Inégalité de Markov [*]
Soit X une variable aléatoire positive, admettant une espérance. Alors

Démonstration. On fait la preuve dans le cas d'une variable à densité (le cas discret est analogue). Soit donc f une densité de X.

X est positive, et donc on peut choisir f telle que $f(x) = 0$ pour $x < 0$.

Soit $a > 0$. On a alors $\forall t \geqslant a,\ tf(t) \geqslant af(t)$, ce qui permet la minoration

$E(X) =$

$=$

In fine, on trouve donc

[*]. Андрей Андреевич Марков (Andreï Andreïevitch Markov), 1856 – 1922, Russe

et on en déduit le résultat cherché. □

NOTA

Il faut noter que l'inégalité de Markov donne une majoration très grossière. Dans beaucoup de cas particulier, on peut facilement obtenir une majoration plus fine.

Dans le cas où X admet un moment d'ordre 2, on peut affiner un peu le résultat

Corollaire 13.1.2
Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. Alors

Démonstration. L'inégalité de Markov appliquée à X^2 – qui est bien positive et qui admet une espérance – donne

Comme $P(X^2 \geqslant a^2) =$, on a bien le résultat cherché. □

Proposition 13.1.3 : Inégalité de Bienaymé † -Tchebychev ‡
Soit X une variable aléatoire admettant une variance. Alors

Démonstration. On commence par noter que la variable aléatoire $|X - E(X)|$ admet un moment d'ordre 2 : en effet

$$E(|X - E(X)|^2) =$$

On peut donc appliquer le corollaire de l'inégalité de Markov :

et on retrouve bien le résultat cherché. □

NOTA

Cette inégalité confirme l'intuition qu'on a de la variance, c'est-à-dire que plus la variance est faible, plus les valeurs de X sont proches de son espérance.

†. Irénée-Jules Bienaymé, 1796–1878, Français
‡. Пафнутий Львович Чебышёв (Pafnouti Lvovitch Tchebychev), 1821–1894, Russe

EXEMPLE

Un tireur à l'arc tire 100 flèches sur une cible. Toutes les flèches ont un point d'impact moyen M, et l'écart-type de la distance à M est de 40cm.
On considère une des flèches. Quelle est la probabilité qu'elle soit à plus de 50cm du point M ? 20cm ? 1m ?
Notons X la distance entre cette flèche et M. On a donc $E(X) =$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous donne donc

$$P(|X| \geqslant 50) \leqslant$$

De même, on trouve

$$P(|X| \geqslant 20) \leqslant$$

et

$$P(|X| \geqslant 100) \leqslant$$

EXERCICE

Soit X une variable aléatoire d'espérance m et de variance σ^2. Minorer la probabilité

$$P(m - 2\sigma < X < m + 2\sigma).$$

On note à nouveau que cette inégalité est assez grossière.

L'avantage des inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev est de nécessiter très peu d'hypothèses : il suffit de connaître l'espérance et/ou la variance de la variable aléatoire pour avoir une inégalité, mais il n'y a pas besoin de la loi complète.

13.1.2 Convergence en probabilité

Définition 13.1.4
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, et soit X une variable aléatoire. On dit que la suite (X_n) converge en probabilité vers la variable X si

On note alors $X_n \xrightarrow{P} X$.

NOTA

On peut remplacer l'inégalité large $|X_n - X| \geqslant \varepsilon$ par une inégalité stricte $|X_n - X| > \varepsilon$ sans changer le sens de la définition.

De même, il n'est pas nécessaire de le montrer pour tout $\varepsilon > 0$; il suffit de le montrer pour tout ε suffisamment petit, *i.e.* dans un intervalle de la forme $]0, \alpha[$, $\alpha > 0$.

Proposition 13.1.5
La limite en probabilité d'une suite de variables aléatoires (X_n) est unique presque sûrement, i.e.

EXEMPLE

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes toutes de loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.
Alors la fonction de répartition de Y_n est donnée par, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$P(Y_n \leqslant x) =$$

$$=$$

$$=$$

On a donc pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$,

$$P(|Y_n - 1| \geqslant \varepsilon) =$$

On a donc montré que $Y_n \xrightarrow{P}$.

NOTA

On note que les Y_n sont des variables à densité, mais que la limite en probabilité est une variable discrète. L'inverse est également possible.

Proposition 13.1.6
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires, et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors si $X_n \xrightarrow{P} X$, alors

13.1.3 Loi faible des grands nombres

Théorème 13.1.7 : Loi faible des grands nombres
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, qui admettent toutes la même espérance m et la même variance σ^2.

On pose $\overline{X_n} = \frac{X_1+...+X_n}{n}$.

Alors

Démonstration. Soit donc $\varepsilon > 0$. On note que $\overline{X_n}$ admet une variance, et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous donne

Il nous reste à calculer l'espérance et la variance de $\overline{X_n}$.

On a, par linéarité de l'espérance

$$E(\overline{X_n}) =$$

et par indépendance des X_i,

$$V(\overline{X_n}) =$$

Finalement, on a bien

□

NOTA

Ce théorème, très important, est en fait assez intuitif : pour estimer l'espérance d'une variable aléatoire, on la simule un grand nombre de fois, et la moyenne de tous les résultats est proche de l'espérance.

Corollaire 13.1.8 : Théorème de Bernoulli
Soit (X_n) *une suite de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre* p*, indépendants. Alors*

$$\overline{X_n} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$

NOTA

On note qu'on peut estimer la vitesse de convergence, en remarquant que $p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$.

L'inégalité dans la preuve du théorème devient alors

Ceci nous permet de majorer l'erreur, sans connaître la valeur de p.

EXEMPLE

On souhaite estimer la valeur de π à $0,1$ près, avec un risque d'erreur inférieur à 1%. Pour cela, on tire au hasard deux valeurs x et y uniformément dans $[0,1]$. On note que la probabilité que le point de coordonnées (x,y) soit dans le quart de cercle de centre 0 et de rayon 1 est $\frac{\pi}{4}$.
On itère l'expérience : on note X_n la variable aléatoire qui vaut 1 si le n-ième point tiré est dans le cercle, 0 sinon.
On cherche donc n tel que

L'inégalité précédente nous donne

Il suffit donc de prendre

13.2 Convergence en loi

Définition 13.2.1
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires, et soit X une variable aléatoire. On note F_{X_n} et F_X leurs fonctions de répartitions.

On dit que (X_n) converge en loi vers X si pour tout point de continuité de F_X, on a

On note alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

NOTA

Le terme de *convergence en loi* est justifié par le fait que ce type de convergence ne dépend que de la loi de X, et non de sa définition. Plus précisément, si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et si Y est une variable aléatoire de même loi de X, alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$.
On a vu que ce n'était pas le cas pour la convergence en probabilité.

De plus, comme pour la convergence en probabilité, la convergence en loi ne préserve pas le caractère discret ou à densité des variables aléatoires.

NOTA

Un résultat (hors-programme) assure que la convergence en probabilité implique la convergence en loi vers la même variable.
Donc, si on ne connaît pas la limite en probabilité d'une suite de variables, on peut commencer par chercher sa limite en loi : celle en probabilité sera nécessairement de même loi.

Méthode : Pour montrer une convergence en loi, on suit les étapes suivantes :

- Trouver les fonctions de répartitions F_{X_n}
- Étudier, à $x \in \mathbb{R}$ fixé, la suite $(F_{X_n}(x))$. On note $F(x)$ la limite.
- Vérifier que F est une fonction de répartition (limites 0 et 1 en $-\infty$ et ∞, croissance, continuité à droite).
- Dans ce cas, (X_n) converge vers n'importe quelle variable aléatoire de fonction de répartition F.

EXEMPLE

Soient $U_n \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$ mutuellement indépendantes. On pose

$$X_n = n(1 - \max(U_1, \dots, U_n)).$$

On commence par chercher la fonction de répartition de X_n : soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} P(X_n \leqslant x) &= \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Or on sait que $(1 + \frac{x}{n})^n \xrightarrow[n\to\infty]{}$, et donc, pour tous n et x

$$F_{X_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{}$$

On reconnaît alors la fonction de répartition d'une loi

On peut donc dire, en posant $X \hookrightarrow$, que

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X.$$

13.2.1 Opérations et convergence en loi

Proposition 13.2.2
Soit (X_n) *une suite de variables aléatoires qui converge en loi vers une variable* X*. Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors*

Il faut faire attention dans le cas de deux suites de variables aléatoires : la convergence en loi n'est pas compatible avec les sommes et produits dans le cas général. Un cas particulier est le

Théorème 13.2.3 : de Slutsky [§]
Soient (X_n) *et* (Y_n) *deux suites de variables aléatoires. Si* $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ *et* $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c$*, où* c *est une constante, alors*

-

-

13.2.2 Cas des variables à valeurs entières

Proposition 13.2.4
Soient (X_n) *et* X *des variables aléatoires à valeurs dans* $\mathbb{Z}$*. Alors*

$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \quad \Leftrightarrow$

Démonstration. La variable X étant à valeurs dans $\mathbb{Z}$, on note que la fonction F_X est nécessairement continue en tous les points $k \pm \frac{1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$(\Rightarrow)$ Supposons que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a alors

$$P(X_n = k) =$$

§. Слуцкий, Евгений Евгеньевич (Evgueni Evguenievitch Sloutski), 1880 – 1848, Russe

Or $F_{X_n}\left(k+\frac{1}{2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{}$ et $F_{X_n}\left(k-\frac{1}{2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{}$,
et donc

$$P(X_n = k) \xrightarrow[n\to\infty]{}$$

($\Leftarrow$) Supposons maitenant que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $P(X_n = k) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(X = k)$. Soit $x \in \mathbb{R}$, et soit $\varepsilon > 0$.

Notons que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ avec $|a - b| > 1$, on a

$$F_{X_n}(a) - FX_n(b) =$$

Choisissons deux réels A et B de la façon suivante : comme $F_X(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0$, on peut trouver $A < x$ tel que . De même, on choisit $B > x$ tel que .

D'après la remarque précédente, on a donc un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$,

En particulier

$$F_{X_n}(x) - F_X(x) \geqslant$$

De la même façon, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_1$,

On en déduit

$$F_{X_n}(x) - F_X(x) \leqslant$$

In fine, en prenant $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on obtient bien

et donc le résultat cherché.

$\square$

Proposition 13.2.5 : Approximation de loi binomiale par la loi de Poisson
Soit (X_n) une suite de variables alétoires de lois respectives $\mathcal{B}(n, p_n)$, avec $np_n \to \lambda > 0$.

Alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où $X \hookrightarrow$.

Démonstration. Les lois binomiales et de Poisson sont à valeurs entières, et on applique donc le résultat précédent.

On a donc

$$P(X_n = k) =$$

On note que la condition $np_n \to \lambda$ est équivalente à dire que $p_n \sim$, et donc

$$\left(\frac{p_n}{1-p_n}\right)^k \sim$$

De plus, on a

$$(1-p_n)^n = e^{n\ln(1-p_n)},$$

avec $n\ln(1-p_n) \sim$. Donc $(1-p_n)^n \to$. On peut aussi montrer facilement que $\binom{n}{k} \sim$.

On a donc

$$P(X_n = k) \sim$$

et on reconnaît la loi d'une variable de Poisson de paramètre λ. □

Dans la pratique, pour n assez grand et certaines conditions, on utilise le résultat d'approximation suivant :

Corollaire 13.2.6
Si $p \leqslant 0,1$, $n \geqslant 30$ et $np \leqslant 15$, on peut approximer la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par

13.2.3 Approximations

Lemme 13.2.7
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, admettant une espérance μ et une variance σ^2.

Alors $\overline{X_n} = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ admet une espérance et une variance, avec

$$E(\overline{X_n}) = \qquad \text{et } V(\overline{X_n}) =$$

La variable

$$\overline{X_n^*} =$$

est donc une variable centrée réduite.

Théorème 13.2.8 : central limite
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, admettant une espérance μ et une variance σ^2.

Alors $\overline{X_n^*} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X_n} - \mu)$ converge en loi vers une variable suivant une loi

NOTA

Le théorème central limite est un raffinement de la loi faible des grands nombres. En effet, si la loi faible des grands nombres nous dit que $\overline{X_n}$ est proche de μ, le théorème central limite nous informe sur la dispersion :

$$\overline{X_n} \simeq \mathcal{N}(\mu, \sigma/n).$$

Corollaire 13.2.9
Avec les notations du théorème précédent, pour tous $a \leqslant b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, on a

$$\lim_{n\to\infty} P(a < \overline{X_n^*} \leqslant b) =$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Le théorème central limite nous permet donc de faire, sous certaines conditions [¶], des approximations.

Un problème qui apparaît est l'approximation d'une loi discrète X par une loi à densité Z : on ne peut pas écrire $P(X = k) \simeq P(Z = k)$, car ce dernier est toujours nul. On applique alors une *correction de continuité* en posant

$$P(X = k) \simeq$$

Proposition 13.2.10 : Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson
Pour $n \geqslant 30$, $np \geqslant 15$ et $n(1-p) \geqslant 15$, on peut approximer la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi normale $\mathcal{N}($ $)$.

EXERCICE

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(100; 0,4)$. Donner une approximation de $P(X = 35)$ (un calcul direct donne $P(X = 35) \simeq 0.0491$).

¶. Le programme officiel indique "Toutes les indications devront être fournies aux candidats quant à la justification de l'utilisation des approximations". Il n'est donc pas nécessaires de connaître par cœur ces conditions.

Proposition 13.2.11
Pour $\lambda \geqslant 15$, on peut approximer la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ par la loi normale $\mathcal{N}(\qquad)$.

13.3 Exercices

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire, et $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction strictement croissante telles que $g(|X|)$ admette une espérance. Montrer que

$$\forall a > 0,\ P(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{E(g(|X|))}{g(a)}.$$

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance σ^2. Montrer que

$$\forall \alpha > 0,\ P(X \geqslant \mu + \alpha\sigma) \leqslant \frac{1}{1+\alpha^2}.$$

On pourra introduire la variable $Y = (\alpha(X-\mu)+\sigma)^2$.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire, et $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(1/n)$. On pose $X_n = X + Y_n$.

Montrer que $X_n \xrightarrow{P} X$.

Même question si $Y_n \hookrightarrow \mathcal{N}(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$.

Exercice 4. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi $\mathcal{U}([a,b])$. On note $Y_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

Montrer que (Y_n) converge en probabilité vers la variable constante a.

Exercice 5. Soient (X_n) indépendantes définies par les lois suivante :

$$\begin{cases} P(X_n = n) & = \frac{1}{n^2} \\ P(X_n = 0) & = 1 - \frac{1}{n^2} \end{cases}$$

On pose $\overline{X_n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ Montrer que $\overline{X_n}$ converge en probabilité vers 0.

Exercice 6. Soit (U_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{U}([0,1])$. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.

On pose $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g(U_i)$ pour $n \geqslant 1$.

Montrer que $S_n \xrightarrow{P} \int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 7. Soit X une variable aléatoire. Pour $n \geqslant 1$, on pose $X_n = \frac{1}{n}\lfloor nX \rfloor$.

Montrer que $X_n \xrightarrow{P} X$.

Exercice 8. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2)$, $Y = 1 - X$ et $X_n = X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(i) Montrer que (X_n) converge en loi vers Y.

(ii) Calculer $P(|X_n - Y| \geqslant \varepsilon)$, et en déduire que la convergence n'a pas lieu en probabilité.

Exercice 9. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{E}(n)$. Étudier la convergence en loi de (X_n).

Exercice 10. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. On définit la fonction

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{an}{\pi(1+n^2x^2)} \end{array}.$$

(i) Calculer la valeur de a pour que f_n soit une densité.

(ii) Soient X_n des variables aléatoires de densité f_n. Montrer que X_n n'admet ni espérance, ni variance.

(iii) Étudier la convergence en loi de la suite (X_n).

Exercice 11. On considère une suite (X_n) de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 1. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Rappeler quelle est la loi suivie par S_n. Donner l'espérance et la variance de S_n.
2. À l'aide du théorème de la limite centrée *[sic]*, établir que $\lim_{n\to\infty} P(S_n \leqslant n) = \dfrac{1}{2}$.
3. En déduire la valeur de
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t} \mathrm{d}t.$$
4. a. Utiliser le résultat précédent pour montrer que
$$\int_0^1 z^{n-1} e^{-nz} \mathrm{d}z \sim \frac{n!}{2n^{n+1}}.$$
   b. On admet que $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$. En déduire un nouvel équivalent de $\int_0^1 z^{n-1} e^{-nz} \mathrm{d}z$

Exercice 12. Soit $a \in]0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{\alpha}{n})$. Montrer que la suite (X_n) converge en loi, et trouver la loi limite.

Exercice 13. $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X_n = 1) = p \text{ et } P(X_n = -1) = q = 1 - p.$$

Trouver la loi de $Y_n = \displaystyle\prod_{k=1}^n X_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite (Y_n) converge en loi.