Chapitre 14

Endomorphismes symétriques

Dans tout ce chapitre, on se place dans un espace euclidien E de dimension n, muni de son produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de sa norme $\| \cdot \|$.

14.1 Endomorphismes et matrices symétriques

Définition 14.1.1
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est symétrique *si pour tous $x, y \in E$,*

EXEMPLE

Les homothéties $f : x \mapsto \lambda x$ sont des endomorphismes symétriques :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in E,\ \langle f(x), y \rangle &= \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

On rappelle aussi la définition de matrice symétrique :

Définition 14.1.2
Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est symétrique si , i.e. *si pour tous i, j,*

Les deux notions sont bien liées :

Proposition 14.1.3

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Alors un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique si et seulement si la matrice $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ *est symétrique.*

Démonstration. Notons $M = (m_{i,j}) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

($\Rightarrow$) Supposons que f est symétrique.

Alors pour tout k, on a $f(e_k) =$, et donc pour tout j

$$\langle f(e_k), e_j \rangle =$$

Mais, par symétrie de f et du produit scalaire, on a

et donc $a_{j,k} = a_{k,j}$.

($\Leftarrow$) Inversement, supposons que M est symétrique. Soient $x, y \in E$ et X, Y leurs matrices respectives dans la base $\mathcal{B}$. Comme $\mathcal{B}$ est orthnormée, on a

$$\begin{aligned} \langle x, f(y) \rangle &= \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Donc f est symétrique.

□

Parmi tous les projecteurs, les projecteurs orthogonaux sont exactement les symétriques :

Proposition 14.1.4
Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Alors p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est un endomorphisme symétrique.

Démonstration. Notons $F = \mathrm{Im}(p)$ et $G = \ker(p)$: p est la projection sur F parallèlement à G.

($\Rightarrow$) Supposons que p est orthogonal ; on a alors $G = F^{\perp}$.

Soient $x, y \in E$, qu'on décompose sur la somme directe $F \oplus G$ comme $x = x_F + x_G$ et $y = y_F + y_G$. On a alors

$$p(x) = x_F \text{ et } p(y) = y_F.$$

Donc

$$\begin{aligned}\langle p(x), y\rangle &= \\ &= \\ &= \\ \langle x, p(y)\rangle &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Supposons que p est un endomorphisme symétrique. Soient $x \in F$ et $y \in G$. Alors

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Donc $F \subseteq G^{\perp}$. Comme $\dim(G^{\perp}) =$, on a l'égalité.

□

Proposition 14.1.5
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ symétrique, et soit F un sous-espace vectoriel.

Alors F est stable par f si et seulement si $F^{\perp}$ est stable par f.

Démonstration. Supposons que F est stable par f. Soient $y \in F^{\perp}$ et $x \in F$. Alors

$$\langle f(y), x\rangle =$$

car $f(x) \in F$. Donc $f(y) \in F^{\perp}$.

Pour le sens réciproque, il suffit d'appliquer le sens direct à $F^{\perp}$, en se rappelant que

□

14.2 Diagonalisation des endomorphismes et matrices symétriques

Proposition 14.2.1
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors M possède au moins une valeur propre complexe.

Démonstration. On sait que M possède un polynôme annulateur, qu'on peut factoriser sur $\mathbb{C}$ grâce au théorème de d'Alembert-Gauss :

$$P = a\prod_{i=1}^{d}(X - \lambda_i)\,, \quad a \neq 0.$$

On sait donc que $\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(M) \subseteq \{\lambda_1, \dots, \lambda_d\}$.

Si aucun des λ_i n'était valeur propre, alors
, et donc

$$a \prod_{i=1}^{d} (M - \lambda_i I_n) = 0$$

aussi, ce qui est impossible. □

Proposition 14.2.2
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Alors M possède au moins une valeur propre réelle, et* $\mathrm{Spec}(M) \subseteq \mathbb{R}$.

Démonstration. On sait déjà que M admet une valeur propre complexe, donc il suffit de montrer la deuxième partie.

Soit donc $\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(M)$, et soit $X \in E_\lambda(M) \backslash \{0\}$.

On a alors $MX = \lambda X$, et donc

$$\begin{aligned} M\overline{X} &= \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$^{\mathbf{t}}XM\overline{X} =$$

D'autre part, on sait que $MX = \lambda X$, et donc $^{\mathbf{t}}XM = \lambda\, ^{\mathbf{t}}X$, d'où

$$^{\mathbf{t}}XM\overline{X} =$$

On en déduit donc que

Mais

$$^{\mathbf{t}}X\overline{X} =$$

car $X \neq 0$.

Finalement, $\lambda = \overline{\lambda}$, d'où $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Ce résultat s'applique aussi aux endomorphismes :

Corollaire 14.2.3
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Alors f possède au moins une valeur propre.

*. il est fondamental qu'elle soit à coefficients réels.

Proposition 14.2.4
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et soient $e_1, \dots, e_p$ des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Alors la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est orthogonale.

Démonstration. Calculons :

$$\begin{aligned}(\lambda_i - \lambda_j)\left\langle e_i, e_j\right\rangle &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Si $i \neq j$, alors $\lambda_i \neq \lambda_j$, et donc $\left\langle e_i, e_j\right\rangle = 0$. □

Corollaire 14.2.5
Les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont deux à deux orthogonaux.

Théorème 14.2.6
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Alors f est diagonalisable, et il existe une base orthonormée de E de vecteurs propres de f.

Démonstration. Admis. □

Théorème 14.2.7 : spectral
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Alors M est diagonalisable avec des valeurs propres réelles, et il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que

$$M = PD\,{}^{\mathbf{t}}P.$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme représenté par M dans la base canonique $\mathcal{B}$. Alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de f est diagonale, et en notant P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, on a

$$M = PDP^{-1}.$$

Or la base canonique et la base $\mathcal{B}'$ sont toutes les deux orthonormées pour le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et donc la matrice P est une matrice orthogonale : on a donc $P^{-1} = {}^{\mathbf{t}}P$. □

NOTA

Attention, ce résultat n'est valable que pour les matrices symétriques réelles. Certaines matrices symétriques complexes ne sont pas diagonalisable.

Proposition 14.2.8
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, et soient P une matrice orthogonale et D une matrice diagonale telles que

$$M = PD\,{}^{\mathbf{t}}P.$$

On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de P, et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées.

Alors

$$M =$$

Démonstration. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On a alors

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i C_i \,{}^{\mathbf{t}}C_i \right) C_k &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Les deux matrices ont donc les mêmes images pour tous les vecteurs d'une base, et sont donc égales.

□

Méthode de diagonalisation d'une matrice symétrique M

- Déterminer le spectre de M.
- Trouver une base orthonormée de chacun des sous-espaces propres, éventuellement en appliquant le procédé de Gram-Schmidt.
- La concaténation de toutes ces bases forme une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de E, car les sous-espaces propres sont orthogonaux deux à deux.
- On a alors $M = {}^{\mathbf{t}}PDP$, où ${}^{\mathbf{t}}P$ est la matrice des vecteurs de $\mathcal{B}'$ et D la matrice diagonale des vecteurs propres.

EXERCICE

Diagonaliser la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

14.3 Forme quadratique associée à une matrice symétrique

Définition 14.3.1
Soit $M \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. *On appelle* forme quadratique associée à M *la fonction*

$$q_M : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \end{array} .$$

EXEMPLE

La forme quadratique associée à $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ est la fonction q_M définie par

$q_M(x, y) =$

NOTA

On note qu'une forme quadratique est nécessairement un polynôme homogène de degré 2 : tous les termes sont de la forme

EXERCICE

Soit

$$q : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & x^2 + 2y^2 - 4xy + 6yz \end{array}$$

Trouver une matrice symétrique M telle que q soit la forme quadratique associée à M.

On note qu'on peut exprimer une forme quadratique en fonction d'un produit scalaire :

Proposition 14.3.2
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *une matrice symétrique, et* q_M *la forme quadratique associée. On note* f *l'endomorphisme associé à* M *dans la base canonique. Alors*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q_M(x) =$$

Proposition 14.3.3 : Signe d'une forme quadratique
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *une matrice symétrique, et soit* q_M *la forme quadratique associée. Alors*

- *Si toutes les valeurs propres de* M *sont positives (resp. négatives), alors*

- *Si toutes les valeurs propres de* M *sont strictement positives (resp. strictement négatives), alors*

- *Si M a deux valeurs propres non nulles de signes contraires, alors*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme représenté par M dans la base canonique. Alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n$ de vecteurs propres de f : on note $f(e_i) = \lambda_i e_i$.

On a alors, pour tout $x = \sum x_i e_i$:

$$q_M(x) =$$

$$=$$

$$=$$

Les deux premiers points suivent directement.

Si f a deux valeurs propres non nulles de signes contraires $\lambda_i > 0$ et $\lambda_j < 0$, alors

$$q_M(e_i) = \qquad\qquad \text{et} \quad q_M(e_j) =$$

□

EXERCICE

Trouver le signe de la forme quadratique de l'exercice précédent.

14.4 Exercices

Exercice 1. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ deux endormorphismes symétriques. Montrer que $f \circ g$ est symétrique si et seulement si f et g commutent.

Exercice 2. Soient a un vecteur unitaire de E et $k \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. On définit

$$f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x + k\langle x, a\rangle a \end{array}.$$

(i) Montrer que f est un endomorphisme symétrique.

(ii) Montrer que f est un automorphisme.

(iii) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Exercice 3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Montrer que

$$\operatorname{Im}(u) = (\ker(u))^{\perp}.$$

Exercice 4. Orthodiagonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Montrer que le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est égal à la somme des dimensions des sous-espaces propres de ${}^{\mathbf{t}}AA$ associés à une valeur propre non nulle :

$$\operatorname{rg}(A) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Spec}({}^{\mathbf{t}}AA)\backslash\{0\}} \dim(E_{\lambda}({}^{\mathbf{t}}AA)).$$

Exercice 6. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

(i) Justifier que le spectre de A est une partie finie non vide de $\mathbb{R}$.
On pose

$$\lambda_{\min} = \min \operatorname{Spec} A \text{ et } \lambda_{\max} = \max \operatorname{Spec} A$$

(ii) Montrer

$$\forall 1 \leq i \leq n, \lambda_{\min} \leqslant a_{i,i} \leqslant \lambda_{\max}$$

Exercice 7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^{\mathbf{t}}AA = A\,{}^{\mathbf{t}}A$. On suppose que A est nilpotente, *i.e.*

$$\exists p \in \mathbb{N}^*,\ A^p = 0.$$

Montrer que $A = 0$.

Exercice 8. Soient f et g deux endomorphismes symétriques de E, dont les valeurs propres sont toutes positives ou nulles.

(i) Montrer qu'il existe un endomorphisme symétrique φ tel que $f = \varphi^2$. (De même, il existe un endomorphisme symétrique ψ tel que $g = \psi^2$.)

(ii) Montrer que $\ker(f + g) = \ker(f) \cap \ker(g)$.

Exercice 9. (i) Montrer qu'une matrice inversible est symétrique si et seulement si son inverse l'est.

(ii) Déterminer toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A\,{}^{\mathbf{t}}AA\,{}^{\mathbf{t}}AA = I_n.$$

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer $A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, puis en déduire les valeurs propres de A. Quel est le signe de la forme quadratique associée à A ?

Exercice 11. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -36 \\ 0 & -25 & 0 \\ -36 & 0 & 23 \end{pmatrix}$, et soit q la forme quadratique associée à A. Déterminer les valeurs propres de A, puis déterminer des vecteurs x et y tels que $q(x) > 0$ et $q(y) < 0$.

Exercice 12. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et on définit

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & {}^{\mathbf{t}}\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x) A\, \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(y) \end{array}.$$

Montrer que φ est un produit scalaire si et seulement si toutes les valeurs propres de M sont strictement positives.

Exercice 13. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible.

(i) Établir que ${}^{\mathbf{t}}AA$ est une matrice symétrique à valeurs propres strictement positives.

(ii) Montrer qu'il existe une matrice symétrique à valeurs propres strictement positives S telle que $S^2 = {}^{\mathbf{t}}AA$.

(iii) Établir la *décomposition de Cartan* :

Pour tout matrice inversible A, il existe une matrice orthogonale P et une matrice symétrique à valeurs propres strictement positives telles que $A = OS$.

Cette décomposition est en fait unique.