Chapitre 16

Extrema de fonctions à plusieurs variables

Dans tout ce chapitre, on travaillera dans l'espace $\mathbb{R}^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, muni de son produit scalaire canonique et de la norme euclidienne :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \text{ et } \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

16.1 Un peu de topologie

Définition 16.1.1
Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. On appelle :

- boule ouverte de centre a et de rayon r *l'ensemble*

- boule fermée de centre a et de rayon r *l'ensemble*

NOTA

Si on parle simplement de *boule de centre a et de rayon r* sans autre précision, c'est alors une boule ouverte qu'on considère.

Définition 16.1.2
Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$. On dit que A est une partie ouverte *de $\mathbb{R}^n$ (ou un* ouvert *de $\mathbb{R}^n$) si, autour de chaque point $x \in A$, on peut tracer une boule ouverte entièrement incluse dans A :*

EXEMPLE

Les boules ouvertes $B(a, \rho)$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$. En effet, soit $x \in B(a, \rho)$. Alors par définition, $\|x - a\| < \rho$.
Maintenant, on va montrer que pour $r =$, on a bien $B(x, r) \subseteq B(a, \rho)$. Soit donc $y \in B(x, r)$: on a donc Mais alors

$$\|y - a\| =$$

Définition 16.1.3
Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$. On dit que A est une partie fermée *de $\mathbb{R}^n$ (ou simplement un* fermé *de $\mathbb{R}^n$) si*

NOTA

Attention, certains ensembles ne sont ni ouverts, ni fermés.

EXEMPLE

Les boules fermées $B_f(a, \rho)$ sont des fermés de $\mathbb{R}^n$. En effet, le complémentaire est

$$\mathbb{R}^n \backslash B_f(a, \rho) =$$

Soit $r > 0$ tel que $r < \|x - a\| - \rho$. Soit $y \in B(x, r)$. Alors

$$\|y - a\| =$$

NOTA

Intuitivement, les ouverts de $\mathbb{R}^n$ sont les ensembles qui ne contiennent pas leur bord, et les fermés sont ceux qui le contiennent. Autrement dit, les ensembles définis par une inégalité stricte sont ouverts, et ceux définis par une inégalité large sont fermés.

NOTA

Les seuls ensembles qui sont à la fois ouverts et fermés dans $\mathbb{R}^n$ sont
À part ces deux cas, un ensemble ne peut pas être à la fois ouvert et fermé.

Proposition 16.1.4
On a les résultats de stabilité suivants :

- *Une union quelconque d'ouverts est ouverte.*
- *Une union* finie *de fermés est fermée.*
- *Une intersection* finie *d'ouverts est ouverte.*
- *Une intersection quelconque de fermés est fermée.*
- *Un produit cartésien d'ouverts (resp. de fermés) est ouvert (resp. fermé).*

Proposition 16.1.5
Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Soient* $a < b \in \mathbb{R}$*. Alors les ensembles*

sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$*.*

Les ensembles

sont des fermés de $\mathbb{R}^n$*.*

Définition 16.1.6
Une partie A *de* $\mathbb{R}^n$ *est dite* bornée *si elle est incluse dans une boule fermée de centre* 0 *:*

Autrement dit, A *est bornée si*

Proposition 16.1.7
Une partie A *de* $\mathbb{R}^n$ *est bornée si et seulement si*

Démonstration. En exercice : il suffit de remarquer que

□

16.2 Fonctions continues sur une partie de $\mathbb{R}^n$

Nous avons vu dans un chapitre précédent la définition de continuité pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$. Mais certaines fonctions (par exemple, $(x, y) \mapsto \sqrt{x+y}$) ne sont définies que sur une partie de $\mathbb{R}^n$.

Définition 16.2.1
Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est dite continue en $a \in A$ si

Une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est dite continue sur A si elle est continue en tout point de A.

Théorème 16.2.2
Tous les résultats vus pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ se transposent au fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^n$.

On peut alors étendre un résultat vu pour les fonctions définies sur un segment de $\mathbb{R}$.

Théorème 16.2.3
Soit A une partie de R^n fermée et bornée. Soit $f : A \to \mathbb{R}$. Alors

16.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

De la même façon, on peut étendre aux fonctions définies sur un *ouvert* de $\mathbb{R}^n$ les résultats vus pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$.

Pour définir les dérivées partielles, il faut commencer par noter que si $f : A \to \mathbb{R}^n$ avec A ouvert, il existe un $r > 0$ tel que la fonction partielle

est bien définie.

Définition 16.3.1
Soit $f : A \to \mathbb{R}$, où A est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$. On dit que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la i-ième variable en $a \in A$ si $f_{a,i}$ est dérivable. On note alors $\partial_i f(a)$ ce réel.

Si f admet des dérivées partielles par rapport à toutes les variables en $a \in A$, on appelle gradient de f en a *le vecteur*

$$\nabla f(a) =$$

Définition 16.3.2
Soit $f : A \to \mathbb{R}$ ou A est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A si f admet des dérivées partielles en tout point de A par rapport à toutes les variables, et que les fonctions $\partial_i f$ sont continues sur A.

Comme pour la continuité, tous les résultats vus dans le chapitre précédent restent vrais, notamment la formule de Taylor à l'ordre 1.

16.4 Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition 16.4.1
Soit $f : A \to \mathbb{R}$ où A est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ sur A.

Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$. Si la fonction $\partial_j f$ admet une dérivée partielle par rapport à la i-ième variable, on note alors

$$\partial^2_{i,j} f =$$

et on appelle cette fonction dérivée partielle d'ordre 2 de f d'indice (i, j).

EXERCICE

Calculer toutes les dérivées partielles d'ordre 2 possibles des fonctions suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_*^+)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \ln(x) + \ln(y) - xy^2 \end{array} \quad \text{en tout point } (x, y).$$

$$g : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^*)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \quad \text{au point } (0, 0).$$

Définition 16.4.2
Soit $f : A \to \mathbb{R}$ définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, qui admet toutes les dérivées partielles d'ordre 2. On appelle matrice hessienne* de f au point a *la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par*

$$\nabla^2(f)(a) =$$

∗. Ludwig Otto Hesse, 1811–1874, Allemand)

NOTA

Attention. Comme pour la notation $\partial^2_{i,j}$, le 2 ne désigne pas un carré, mais indique simplement qu'on fait du calcul différentiel d'ordre 2 ; c'est simplement une notation.

EXERCICE

Calculer la matrice hessienne de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_*^+)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \ln(x)+\ln(y)-xy^2 \end{array} .$$

Définition 16.4.3
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert A de $\mathbb{R}^n$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur A si elle admet des dérivées d'ordre 2 de tout indice i, j, et que ces dérivées partielles sont continues sur A.

Proposition 16.4.4
Les fonctions polynomiales sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur tout ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Il suffit de noter qu'une dérivée partielle d'une fonction polynomiale reste une fonction polynomiale. □

Proposition 16.4.5
Soient f, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert A de $\mathbb{R}^n$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

- *$f + g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur A*
- *λf est de classe $\mathcal{C}^2$ sur A*
- *fg est de classe $\mathcal{C}^2$ sur A*
- *si g ne s'annule pas sur A, $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur A*
- *si f est à valeurs dans $I \subseteq \mathbb{R}$, et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, alors $\varphi \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur A*

Théorème 16.4.6 : de Schwarz †
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors pour tous i, j,

†. Hermann Schwarz, 1843–1921, Allemand

NOTA

Pour trouver une dérivée partielle d'ordre 2, on peut donc le faire dans n'importe quel sens.

Corollaire 16.4.7
La matrice hessienne d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ en un point est

On pourra donc s'intéresser à la forme quadratique associée à la matrice hessienne.

Théorème 16.4.8 : Formule de Taylor [‡] d'ordre 2
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert A de $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in A$.

Alors il existe une fonction ε continue en 0 avec $\varepsilon(0) = 0$ telle que pour tout h tel que $a + h \in A$,

où q_a est la forme quadratique associée à $\nabla^2(f)(a)$.

EXERCICE

Écrire explicitement la formule de Taylor à l'ordre 2 pour une fonction de deux variables.

Proposition 16.4.9
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert A de $\mathbb{R}^n$, et soient $x \in A$ et $u \in \mathbb{R}^n$ non nul.

Alors la fonction $g : t \mapsto f(x + th)$ est définie et dérivable au voisinage de 0, et on a

$$g''(t) =$$

En particulier, $g''(0) =$.

Définition 16.4.10
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert A de $\mathbb{R}^n$, et soient $x \in A$ et $u \in \mathbb{R}^n$ non nul.

On appelle dérivée directionnelle seconde de f en x dans la direction u *le nombre $q_x(h)$.*

‡. Brook Taylorn 1685–1731, Anglais

16.5 Recherche d'extrema

On rappelle les définitions d'extrema locaux et globaux : soit f définie sur un ouvert A de $\mathbb{R}^n$, et soit $a \in A$.

- On dit que f admet un minimum (resp. maximum) global en a si

- On dit que f admet un minimum (resp. maximum) local en a si

Théorème 16.5.1 : Condition nécessaire
Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert A de $\mathbb{R}^n$. Alors si f admet un extremum local en $A \in A$, alors a est un point critique de f, i.e.

NOTA

On sait déjà qu'il faut faire attention, la réciproque est fausse. Il faut aussi faire attention à l'hypothèse "A ouvert" ; le résultat est faux si la fonction est définie sur un fermé.

Dans le cas réel, la dérivée seconde peut nous servir, pour un point critique, à déterminer s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum. On va essayer, par analogie, de faire de même pour les fonction de plusieurs variables.

Lemme 16.5.2
Soit A une matrice symétrique, et soit q_A la forme quadratique associée. Alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

Démonstration. L'ensemble $E = \{q_A(x) \mid \|x\| = 1\}$ est un fermé, car la norme est continue. q_A est polynomiale, donc continue sur E. Elle y admet donc un minimum α et un maximum β. Donc pour tout x unitaire

$$\alpha \leqslant q_A(x) \leqslant \beta.$$

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}^n$ quelconque. Si $x = 0$, le résultat est trivial. Sinon, on a donc

Mais $q_A\left(\frac{x}{\sqrt{\|x\|}}\right) =$. On retrouve donc bien le résultat. □

NOTA

On note qu'on a de plus montré que si $q_A(x) > 0$ (resp. < 0) pour tout x non nul, alors $\alpha > 0$ (resp. $\beta < 0$).

Théorème 16.5.3 : Condition suffisante

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert A de $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in A$ un point critique de f. Alors

- *si* $\operatorname{Spec}(\nabla^2(f)(a)) \subseteq \mathbb{R}_+^*$, *alors f admet*
- *si* $\operatorname{Spec}(\nabla^2(f)(a)) \subseteq \mathbb{R}_-^*$, *alors f admet*
- *si $\nabla^2(f)(a)$ a une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative, alors*

NOTA

On note que le seul cas où on ne peut pas conclure est le cas où la matrice hessienne admet 0 pour valeur propre. Dans ce cas, il faut utiliser une autre méthode pour déterminer la nature du point critique.

Démonstration. Écrivons la formule de Taylor à l'ordre 2 au point critique f : pour tout h non nul

$f(a+h) =$

Supposons que toutes les valeurs propres de la matrice hessienne sont strictement positives.

D'après le lemme précédent, on a $q_a(h) \geqslant \alpha$, où on peut choisir $\alpha > 0$, car q_a est strictement positive sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

Donc,

$$\frac{1}{2\|h\|} q_a(h) + \|h\|\varepsilon(h) \geqslant$$

Comme $h \mapsto \|h\|\varepsilon(h)$ est continue en 0 et vaut 0 en 0, pour h suffisamment petit,

et donc $\|h\|\varepsilon(h) \geqslant$.

Finalement,

$f(a+h) =$

Le cas des valeurs propres toutes strictement négatives est similaire.

Supposons maintenant qu'on a deux valeurs propres $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$. Soient h_1 et h_2 des vecteurs propres de λ_1 et λ_2.

On a alors $q_a(h_1) =$.
De même, $q_a(h_2) =$.

Donc la formule de Taylor devient

$$f(a + h_1) =$$

En prenant h_1 de norme assez petite, comme $\varepsilon(h_1) \to 0$, on peut donc avoir $\frac{1}{2}\lambda_1 + \varepsilon(h_1) \geqslant 0$, et donc

De même,

$$f(a + h_2) =$$

En prenant h_2 de norme assez petite, on peut avoir $\frac{1}{2}\lambda_2 + \varepsilon(h_2) \leqslant 0$, et donc

□

On a alors une méthode pour la recherche d'extrema pour une fonction f définie sur un ouvert A de $\mathbb{R}^n$:

- Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$
- Calculer le gradient de f
- Chercher les points critiques
- Pour chacun des points critiques, calculer la matrice hessienne de f
- Déterminer (le signe de) ses valeurs propres

EXERCICE

Étudier les extrema locaux de $f(x, y) = x(x+1)^2 - y^2$.

16.6 Exercices

Exercice 1. Étudier les extrema de $f : (x,y) \mapsto x^3 + xy + y^3$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Soit f la fonction définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1.$$

(i) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f.

(ii) Déterminer les points critiques de f.

(iii) La fonction a-t-elle des extrema locaux ?

Exercice 3. *Notations de Monge*

Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert A de $\mathbb{R}^2$. Soit $a \in A$ un point critique de f.

On note

$$r = \partial^2_{1,1} f(a),\ s = \partial^2_{1,2} f(a),\ t = \partial^2_{2,2} f(a).$$

Montrer que

- si $r > 0$ et $s^2 - rt < 0$, f admet un minimum strict en a
- si $r < 0$ et $s^2 - rt < 0$, f admet un maximum strict en a
- si $s^2 - rt > 0$, f a un point selle en a.

Exercice 4. On considère la fonction f définie sur $\Omega = (\mathbb{R}_+^*)^3$ par

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \Omega,\ f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{9x_3}.$$

(i) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω. Calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.

(ii) On note $\nabla^2 f(A)$ la matrice hessienne de f en $A = (a_1, a_2, a_3)$.
Justifier que pour tout $A \in \Omega$, pour tout matrice colonne H à trois lignes, non nulle, on a

$$^{\mathbf{t}}H \nabla^2 f(A) H > 0.$$

(iii) f admet-elle des extrema sur Ω ?

Exercice 5. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = -f(y,x).$$

Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la matrice hessienne $\nabla^2 f(a,a)$ est diagonale et de trace nulle.

Exercice 6. Soit $n \geqslant 2$ un entier. On considère la fonction de n variables définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

(i) (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.

(b) Calculer les dérivées premières et secondes de f.

(ii) (a) Déterminer le seul point critique $(a_1, \ldots, a_n)$ de f sur $\mathbb{R}^n$.

(b) Vérifier que la hessienne de f en ce point est la matrice $A_n = 2(I_n + J_n)$, où I_n désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et J la matrice dont tous les éléments sont égaux à 1.

(iii) (a) Déterminer le rang de J_n. En déduire que 0 est valeur propre de J_n et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

(b) Calculer le produit $J_n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) À l'aide des questions précédentes, donner les valeurs propres de J_n, puis celles de A_n.

(iv) (a) Montrer que pour tout $H = \begin{pmatrix} h1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$ non nul, on a ${}^{\mathbf{t}}HA_nH > 0$.

(b) En déduire que f admet un minimum local en $(a_1, \ldots, a_n)$, et vérifier que ce minimum est égal à $\frac{-n}{4(n+1)}$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \left(1 + y + xy - \frac{x^2}{2}\right) e^y.$$

(i) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, et déterminer ses dérivées partielles premières et secondes.

(ii) Montrer que f admet un unique point critique (a, b).

(iii) Calculer les valeurs propres de la matrice hessienne en (a, b). Que peut-on conclure ?

(iv) Déterminer un vecteur propre de la matrice $\nabla^2 f(a, b)$ associé à la valeur propre 0.

(v) En détudiant la fonction $t \mapsto f((a, b) + tu)$, déterminer la nature du point critique.

Exercice 8. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \exp\left(n + 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) + \sum_{i=1}^{n} \exp(x_i).$$

(i) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.

(ii) Détermienr le gradient de f, et en déduire que f possède un unique point critique $\hat{x}$.

(iii) Calculer la hessienne $\nabla^2 f(\hat{x})$ de f en ce point critique.

(iv) Montrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$, ${}^{\mathbf{t}}X\nabla^2 f(\hat{x})X > 0$.

(v) En déduire que f admet en $\hat{x}$ un minimum local.

(vi) Ce minimum local est-il un minimum global ?

Exercice 9. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, et $u_1, \ldots, u_p \in \mathbb{R}^n$. Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{k=1}^{p} \|x - u_k\|^2$$

admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$, et le calculer.