Chapitre 17

Optimisation sous contrainte

17.1 Optimisation sous une contrainte non critique

Dans toute cette partie, φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert A de $\mathbb{R}^n$, et $c \in \mathbb{R}$.

On notera $\mathcal{C} =$, et on appellera *contrainte* l'égalité

Définition 17.1.1
Soit $f : A \to \mathbb{R}$. On dit que f admet un maximum local (resp. minimum local) en $a \in A$ sous la contrainte $\varphi(x) = c$ s'il existe $r > 0$ tel que

On dit que l'extremum est global si la condition précédente est vraie pour tout $x \in \mathcal{C}$.

Méthode 1 : recherche d'extremum sous contrainte par substitution.

Dans la cas où la contrainte peut s'exprimer sous la forme $x_i = h(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$, il suffit de remplacer x_i par sa valeur en fonction des autres variables dans f, et d'étudier la fonction obtenue.

EXEMPLE

Soit $f(x,y) = 2xy$, et soit $\varphi = 2x + 3y$. On veut trouver les extrema de f sous la contrainte $\varphi(x) = 6$.
La contrainte peut se réexprimer en $y =$, et donc le problème revient à trouver les extrema de

L'étude du trinôme donne un maximum en $x =$, et on a alors $y =$. En revanche, il n'y a pas de minimum.
Donc, sous la contrainte $2x + 2y = 6$, la fonction f admet un maximum (global) en

Définition 17.1.2
On dit que $\mathcal{C}$ (ou $\varphi(x) = c$) est une contrainte non critique *si le gradient de φ ne s'annule pas sur $\mathcal{C}$:*

On va maintenant donner une condition nécessaire d'existence d'extremum local :

Théorème 17.1.3 : des extrema liés *
Supposons que $\mathcal{C}$ est une contrainte non critique. Alors si f admet un extremum local sous la contrainte $\varphi(x) = c$ en $a \in A$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

Définition 17.1.4
Un point qui vérifie la condition du théorème précédent s'appelle point critique de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.

NOTA

Attention, il s'agit là encore d'une condition nécessaire : après avoir trouvé les points critiques sous contrainte, il faut vérifier pour chacun d'entre eux s'ils sont des extrema ou pas.

Méthode 2 : recherche d'extremum sous contrainte par le théorème des extrema liés.

- Justifier que f et φ sont de classe $\mathcal{C}^1$.
- Vérifier que la contrainte est non critique.
- Résoudre le système donné par le théorème des extrema liés :

$$\begin{cases} \varphi(x_1, \dots, x_n) = c \\ \partial_1 f(x_1, \dots, x_n) = \lambda \partial_1 \varphi(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \partial_n f(x_1, \dots, x_n) = \lambda \partial_n \varphi(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

- Pour chacun des points critiques sous contrainte, conclure.

EXEMPLE

Reprenons l'exemple précédent : $f(x,y) = 2xy$ et $\varphi(x,y) = 2x + 3y$. On a alors $\nabla f(x,y) =$ et $\nabla \varphi(x,y) =$.

*. C'est en fait une version simplifiée de ce théorème

$\varphi = 6$ est donc une contrainte non critique, et on peut appliquer le théorème des extrema liés : (x, y) est un point critique sous contrainte $2x + 3y = 6$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

On a alors , et en résolvant le système, on trouve un unique point critique sous la contrainte $2x + 3y = 6$, en

On peut se servir de cette méthode pour chercher les extrema d'une fonction définie sur un ensemble fermé bornée.

Soit f définie sur un fermé borné de la forme $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \leqslant x\}$, φ de classe $\mathcal{C}^1$. On sait alors que f admet un minimum et un maximum global, et pour les trouver, on peut :

- Sur l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) < x\}$, qui est ouvert, on applique les théorèmes usuels.
- Sur le bord $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) = x\}$, qui est fermé, on utilise le théorème des extrema liés pour déterminer les points critiques.
- Il suffit alors de comparer les valeurs de f en tous les points critiques : en l'un de ces points f admet un minimum global (et un maximum global).

EXEMPLE

Cherchons les extrema globaux de $f(x, y) = (x + y)^2$ sous la contrainte $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Ce sont bien des fonctions $\mathcal{C}^1$.
Commençons par étudier f sur $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$: on a une infinité de points critiques de la forme . Pour tous ces points
Sur le bord $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$, on peut appliquer le théorème des extrema liés : si (x, y) est un point critique sous contrainte, alors

La différence entre les deux dernières lignes donne $\lambda(x - y) = 0$, et donc $x = y$ ou $\lambda = 0$, *i.e.* $x = -y$. Avec la première équation, dans tous les cas, on trouve $x, y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

On vérifie que les solutions du système sont

Il reste à calculer les images de ces points par f :

Finalement, f admet un maximum global en et en

, et un minimum global en tout point tel que

17.2 Optimisation sous contraintes d'égalités linéaires

Dans cette partie, on autorise la contrainte à être un système d'équations linéaires :

On commence par définir l'application linéaire, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$

$$g_k(x_1, \ldots, x_n) = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n.$$

Le système se réécrit alors

et on note $\mathcal{H}$ l'ensemble des solutions du système homogène associé.

Proposition 17.2.1
$\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, et si x_0 est solution de $\mathcal{C}$, alors

On peut alors caractériser l'ensemble $\mathcal{H}$.

Proposition 17.2.2
$\mathcal{H}$ est exactement

Démonstration. Il suffit de noter que $\nabla g_i =$, et donc $\langle \nabla g_i, x \rangle =$. Donc $(x_1, \ldots, x_n)$ est dans $\mathcal{H}$ si et seulement s'il est orthogonal à tous les gradients des g_i. □

Théorème 17.2.3 : Condition nécessaire
Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert A de $\mathbb{R}^n$. Si f admet un extremum local en a sous la contrainte $\mathcal{C}$, alors $\nabla f(a) \in \mathcal{H}^{\perp}$, i.e.

Démonstration. Supposons par exemple que f admet un maximum local en a. Alors il existe $r > 0$ tel que

Soit $h \in \mathcal{H}$; on pose $g : t \mapsto f(a+th)$ définie sur un intervalle $]-\alpha, \alpha[$. Pour t assez petit, on a donc

$$g(t) =$$

g admet donc un maximum local en 0, et donc

Mais on sait aussi que $g'(t) \quad =$, et donc $g'(0) \quad =$ □

Définition 17.2.4
Un point qui vérifie la condition du théorème s'appelle point critique sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Les λ_i s'appellent alors multiplicateurs de Lagrange[†].

EXEMPLE

Soient $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2$ et $\mathcal{C}$ la contrainte $2x - y + z = 3$.
Commençons par chercher les points critiques de f sous la contrainte $\mathcal{C}$. On sait que si $a = (x,y,z)$ est un point critique, alors

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - y + z = 3 \\ 2x = 2\lambda \\ 2y = -\lambda \\ 4z = \lambda \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x - y + z = 3 \\ x = \lambda \\ y = -\frac{1}{2}\lambda \\ z = \frac{1}{4}\lambda \end{array}\right.$$

En réinjectant dans la première équation, on trouve $\lambda = frac1211$, et donc

$$a = \left(\frac{12}{11}, \frac{-6}{11}, \frac{3}{11}\right)$$

est l'unique point critique de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Mais $\nabla^2 f(a) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, et la formule de Taylor nous donne

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} q_a(h) + \|h\|^2 \varepsilon(h).$$

†. Joseph-Louis Lagrange, 1736–1813, Italien et Français

Comme $a+h \in \mathcal{C}$, $a+h-a = h \in \mathcal{H}$, et donc le produit scalaire est nul ($\nabla f(a) \in \mathcal{H}^{\perp}$). Il suffit donc d'étudier le signe de la forme quadratique, qui est strictement positive.
En prenant h de norme assez petite, on a donc $f(a+h) \geqslant f(a)$, et donc a est un minimum local. On peut en fait montrer que c'est un minimum global sous la contrainte $\mathcal{C}$: en effet, soit $h \in \mathcal{H}$.
On définit la fonction $g : t \mapsto f(a+th)$ qui est de classe $\mathcal{C}^2$, avec $g'(t) = \langle \nabla f(a+th), h \rangle$ et $g''(t) = q_{a+th}(h)$. Mais on note que la matrice hessienne en $a+th$ a ses valeurs propres strictement posisives (c'est la même en tout point), et donc $g''(t) \geqslant 0$. Donc $g'(t)$ est croissante. Comme $g'(0) = \langle \nabla f(a), h \rangle = 0$, on en déduit que g est positive. pour les $t \geqslant 0$. Mais alors g est croissante sur $\mathbb{R}^+$, et donc $f(a+h) = g(1) \geqslant g(0) = f(a)$. Le minimum est donc global.

17.3 Exercices

Exercice 1. Déterminer les extrema locaux de $f(x,y) = (x+y)^2 + (x+z)^2 + (y+z)^2$ sous la contrainte $x+y+z=3$.

Exercice 2. Soit $n \geqslant 2$. Soit $f : A =]0,1[^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}(1-x_i)^n.$$

Déterminer les extrema locaux de f sous la contrainte $\mathcal{C} : \sum_{k=1}^{n} x_k = 1$.

Exercice 3. On reprend la fonction f définie sur $\Omega = (\mathbb{R}_+^*)^3$ par

$$\forall (x_1,x_2,x_3) \in \Omega,\ f(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{4x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{9x_3}.$$

On rappelle qu'on a déjà montré que f n'avait pas de point critique, mais que la matrice hessienne de f en tout point a des valeurs propres strictement positives.

On cherche les extrema de f sous la contrainte $x_1 + x_2 + x_3 = 110$.

(i) Montrer que f admet une unique point critique a sous cette contrainte, que l'on déterminera.

(ii) En introduisant la fonction $g : t \in [0,1] \mapsto f(a+th)$ pour $h = x - a$ où $x \in \mathcal{C}$, montrer qu'il s'agit d'un minimum global sous contrainte.

Exercice 4. On considère une boîte cylindrique de rayon r et de rayon h.

(i) Calculer son volume et son aire en fonction de r et h.

(ii) On veut un volume de 2π. Quelles dimensions, sous cette contrainte, rendent l'aire minimale ?

(iii) Mêmes questions pour un parallélépipède rectangle d'aire fixée 1, de volume maximal.

Exercice 5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^3 - 2x(1+y^2)/$$

(i) Étudier les extrema locaux de f.

(ii) Soit $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Justifier que f admet un minimum et un maximum globaux sur $\mathcal{D}$, qui sont atteints en des points qui vérifient $x^2 + y^2 = 1$. En déduire les valeurs de ces extrema en étudiant la fonction $g : t \mapsto f(\cos(t), \sin(t))$.

Exercice 6. Étudier les extrema des fonctions ci-dessous sous la contrainte indiquée :

(i) $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$ sous la contrainte $xy = 1$

(ii) $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 3x + y$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 10$

(iii) $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y^2 - x^2$ sous la contrainte $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$

(iv) $f : (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \mapsto y - x^3$ sous la contrainte $x^3 + y^4 = 1$

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$. On veut optimiser f sous la contrainte $\begin{cases} x + y = 2 \\ z + t = 0 \end{cases}$

Déterminer l'ensemble des points critiques de f sous la contrainte $\mathcal{C}$, puis déterminer la natude de ces points critiques.

Exercice 8. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, avec q la forme quadratique associée. On rappelle que

$$\forall x = (x_i) \in \mathbb{R}^n,\ q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j.$$

(i) Montrer que q est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, et calculer ses dérivées partielles. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ {}^{\mathbf{t}}\nabla q(x) = 2AX$$

où X est la matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

(ii) On note $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$.
Montrer que q admet un minimum m et un maximum M sur S.

(iii) Montrer que la contrainte S est non critique.

(iv) Montrer que $q(x) = M$ si et seulement si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A associé à M.

(v) En déduire que M (resp. m) est la plus grande (resp. petite) valeur propre de A, et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ m\|x\|^2 \leqslant q(x) \leqslant M\|X\|^2.$$