Chapitre 5

Compléments d'algèbre linéaire

5.1 Changement de bases

Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel de dimension finie, et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Définition 5.1.1
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle matrice de f dans la base $\mathcal{B}$*, notée* $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ *la matrice de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *dont la colonne j contient*

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

avec pour tout j,

$$f(e_j) =$$

Les opérations sur les applications linéaires se traduisent donc en opérations sur les matrices :

Proposition 5.1.2
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

- $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\lambda f) =$
- $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f + g) =$
- $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f \circ g) =$
- *En itérant le résultat précédent,* $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f^n) =$

Cette correspondance est biunivoque : à base fixée, connaissant une application linéaire, on peut lui associer une unique matrice, et inversement, toute matrice correspond à une unique application linéaire.

On aimerait donc pouvoir transformer tout problème vectoriel en problème matriciel. Il reste donc à voir comment transformer les vecteurs.

Définition 5.1.3
Soit $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ un vecteur de E, exprimé dans la base $\mathcal{B}$. Alors la matrice associée à x est

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x) =$$

On peut alors calculer matriciellement des images de vecteurs par des applications linéaires :

Proposition 5.1.4
Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$. On a alors :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f(x)) =$$

Démonstration. Il suffit de calculer d'une part l'image de x par f, et le produit matriciel :

- On a

$$f(x) =$$

$$=$$

$$=$$

- Matriciellement,

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

On voit que les coefficients de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}$ correspondent bien aux coefficients de la matrice $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x)$.

□

Pour l'instant, on s'est limité à une base $\mathcal{B}$ fixée. Mais parfois (souvent), il arrive que le choix d'une base judicieuse permette de faciliter les calculs.

EXERCICE

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ définie dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ par

$$f(x,y) = (x+3y, 2x+2y).$$

(i) Écrire la matrice de f dans la base canonique.

(ii) Montrer que $\mathcal{B} = ((1,-1),(2,3))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

(iii) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

On aimerait donc pouvoir passer d'une base à une autre, sans pour autant revenir à l'application linéaire.

Définition 5.1.5
Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E.

On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ *la matrice notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice dont les colonnes sont les coefficients des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.*

Plus précisément, si pour tout j, $e'_j = p_{1,j}e_1 + \ldots + p_{n,j}e_n$, alors

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} =$$

EXERCICE

Écrire la matrice de passage correspondant à l'exercice précédent.

On a alors la formule de changement de bases pour les matrices :

Proposition 5.1.6
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

- *$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible, d'inverse*
- *Changement de bases :*

(i) Si $x \in E$, alors

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x) =$$

(ii) Si $f \in \mathcal{L}(E)$,

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) =$$

NOTA

On pourra retenir les formules (avec notations évidentes) :

$$X = PX' \text{ et } M = PM'P^{-1}.$$

NOTA

Un moyen mnémotechnique pour retenir ces formules est de les lire de droite à gauche :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(x).$$

On part de la base $\mathcal{B}'$, puis par la matrice de passage, on repasse à la base $\mathcal{B}$.

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}.$$

On part de la base $\mathcal{B}$, puis on passe à la base $\mathcal{B}'$; on regarde la matrice dans $\mathcal{B}'$, puis on repasse à $\mathcal{B}$.

Démonstration. • Il suffit de remarquer que $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est

- (i) Il suffit de faire les calculs.
  (ii) On a donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) &= \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E \circ f \circ \mathrm{id}_E)\\
&= \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E)\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(f)\mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)\\
&= P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(f)P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}
\end{aligned}$$

□

EXERCICE

Calculer l'inverse de la matrice de passage de l'exercice précédent, et en déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Comme vu l'an dernier, changer de base permet donc de simplifier les matrices, et donc de simplifier les calculs d'inverse, de puissances, *etc.*

Définition 5.1.7
On dit que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables

D'après ce qu'on vient de voir, les matrices dans deux bases différentes d'une même application linéaire sont donc semblables.

EXEMPLE

La seule matrice semblable à I_n est . En effet, soit A semblable à I_n. On a alors $A = P^{-1} I_n P =$.

Proposition 5.1.8
La relation de similitude est :

- *réflexive :*
- *symétrique :*
- *transitive :*

Démonstration.

- On a
- On a, si $B = P^{-1}AP$,
- On a, si $B = P^{-1}AP$ et $C = Q^{-1}BQ$,

□

La réciproque de la remarque précédente est vraie :

Proposition 5.1.9
Deux matrices sont semblables si et seulement si elles sont les matrices dans deux bases du même endomorphisme.

En particulier, deux matrices semblables ont même rang.

Démonstration. On a déjà vu, avec les formules de changement de bases, que deux matrices d'un même endomorphisme sont semblables.

Réciproquement, soit A et B deux matrices semblables, $B = P^{-1}AP$. Alors, comme P est inversible, les colonnes de P forment une base de E, et donc P peut être vue comme une matrice de passage.

On sait de plus que le rang d'une matrice est égal au rang de l'application linéaire qu'elle représente, quelque soit le choix de la base. Changer de base ne change donc pas le rang.

□

5.2 Trace d'une matrice carrée

Définition 5.2.1
Soit $A = (A_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *une matrice carré. On appelle* trace de A*, notée* $\mathrm{Tr}(A)$ *la somme des coefficients de la diagonale de* A *:*

$$\mathrm{Tr}(A) =$$

La trace d'une matrice est donc un élément du corps $\mathbb{K}$. Si on voit ce corps comme un espace vectoriel sur lui-même, Tr devient une application linéaire :

Proposition 5.2.2
On a

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \mathrm{Tr}(\lambda A + B) =$$

Démonstration.

□

Proposition 5.2.3
On a

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{Tr}({}^{\mathsf{t}}A) = \mathrm{Tr}(A) \text{ et } \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

Démonstration.

□

On en déduit la propriété fondamentale suivante :

Proposition 5.2.4
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) =$$

Démonstration. On a $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(AP^{-1}P) = \mathrm{Tr}(A)$. □

Ainsi, deux matrices semblables ont forcément la même trace. En particulier, les matrices dans différentes bases d'une même application linéaire ont toutes la même trace : on l'appelle alors la *trace de l'application linéaire*.

NOTA

Cette propriété nous permet aussi de vérifier nos calculs ; après un calcul de changement de base, la trace ne doit pas avoir changé. C'est un calcul qui est rapide, et qui peut facilement montrer une erreur.

5.3 Polynômes d'endomorphismes et de matrices

Puisqu'on peut ajouter et composer (resp. multiplier) des endomorphismes (resp. des matrices), on va maintenant généraliser et prendre des polynômes :

Définition 5.3.1
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- *Pour tout entier n, on notera $f^0 = \mathrm{id}_E$ et $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$*
- *Si $P = \sum a_k X^k$ est un polynôme à coefficient dans $\mathbb{K}$, on notera alors $P(f) = \sum a_k f^k$.*

De la même façon, on définira un polynôme de matrices comme

$$P(M) = \sum a_k X^k.$$

NOTA

Attention en prenant un polynôme d'endomorphisme ou de matrice. Par exemple, si $P = X^2 + 2$, $P(f) =$ et $P(M) =$.

Les opérations sur les polynômes se transforment bien en opérations sur les endomorphismes et matrices :

Proposition 5.3.2
Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $f \in \mathcal{L}(E)$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Alors*

a) $(P + Q)(f) =$

b) $(P + Q)(M) =$

c) $(\lambda P)(f) =$

d) $(\lambda P)(M) =$

e) $(P \times Q)(f) =$

f) $(P \times Q)(M) =$

On note en particulier que, comme le produit de polynôme est commutatif, les endomorphismes $P(f)$ et $Q(f)$ (resp. les matrices $P(M)$ et $Q(M)$) commutent toujours.

Proposition 5.3.3
Soit M la matrice d'un endomorphisme f dans une base $\mathcal{B}$. Alors $P(M)$ est la matrice de $P(f)$ dans cette même base $\mathcal{B}$.

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 5.3.4
Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables, alors $P(A)$ et $P(B)$ aussi.

Démonstration.

□

Certains polynômes sont plus intéressants que d'autres : les polynômes annulateurs.

Définition 5.3.5
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). Un polynôme P est dit annulateur *si $P(f) = 0$ (resp. $P(M) = 0$).*

NOTA

Attention ! 0 désigne deux choses différentes ici : $P(f)$ doit être l'endomorphisme nul, et $P(M)$ doit être la matrice nulle.

EXEMPLE

Pour les endomorphismes classiques :

- $X - \lambda$ est un polynôme annulateur de l'homotéthie de rapport λ $\lambda \mathrm{id}_E$.
- $X^2 - X$ est un polynôme annulateur des projections.
- $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur des symétries.

Proposition 5.3.6
P est un polynôme annulateur d'un endomorphisme f si et seulement si c'est un polynôme annulateur de la matrice de f dans une base quelconque.

Démonstration. Si $P(f) = 0$, alors comme $P(M)$ est la matrice de $P(f)$, on a nécessairement $P(M) = 0$.

Réciproquement, si $P(M) = 0$, alors toutes les matrices semblables à M sont annulées par P, et donc $P(f) = 0$. □

On a alors :

Théorème 5.3.7
Dans un espace vectoriel E de dimension finie, tout endomorphisme (et donc toute matrice) admet un polynôme annulateur non nul.

Le polynôme annulateur unitaire de f de plus bas degré sera appelé polynôme minimal *de f.*

Démonstration. On sait que $\mathcal{L}(E)$ est de dimension n^2 si $\dim E = n$. Donc la famille $(f^0, f^1, \ldots, f^{n^2})$ qui a $n^2 + 1$ éléments est forcément liée. □

NOTA

La preuve nous apprend donc que le polynôme minimal d'un endomorphisme est de degré au plus n^2.

5.4 Sous-espaces stables

Définition 5.4.1
Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, et F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est stable par f *si $f(F) \subseteq F$,* i.e.

EXEMPLE

Les sous-espaces vectoriels de E suivants sont stables par tout endomorphisme f :

-
-

Proposition 5.4.2
Un sous-espace F est stable par f si et seulement si, étant donné une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de F, $f(e_k) \in F$ pour tout k.

Démonstration. Le sens direct est évident.

□

Proposition 5.4.3
Si f et g sont deux endomorphismes de E qui commutent, alors $\ker(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont stables par f.

En particulier, si $P \in \mathbb{K}[X]$, $\ker(P(f))$ et $\mathrm{Im}(P(f)$ sont stables par f.

En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\ker(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f - \lambda \mathrm{id}_E)$ sont stables par f.

Démonstration. On ne montre donc que le premier point, les autres étant des corollaires directs.

Soit $x \in \ker(g)$. On a alors
Donc $f(x) \in \ker(g)$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(g)$: on écrit $y = g(x)$. Alors

□

Définition 5.4.4
Si F est un sous-espace stable par un endomorphisme f, alors on peut définir l'endomorphisme induit par f sur F *comme*

5.5 Exercices

Exercice 1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est A. On pose $\varepsilon_1 = (1,1,1), \varepsilon_2 = (1,-1,0), \varepsilon_3 = (1,0,1)$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

a) Montrer que $\mathcal{B}'$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Écrire la matrice de f dans cette base.

c) Déterminer une base de $\ker f$ et de $\mathrm{Im} f$.

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Soit $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la famille définie par

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= e_1 + e_2 - e_3 \\ \varepsilon_2 &= e_1 - e_3 \\ \varepsilon_3 &= e_1 - e_2 \end{aligned}$$

a) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E et former la matrice D de f dans $\mathcal{B}'$.

b) Exprimer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et calculer P^{-1}.

c) Quelle relation lie les matrices A, D, P et P^{-1} ?

d) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E dans laquelle la matrice représentative de f est une matrice diagonale D de coefficients diagonaux : $1, 2$ et 3.

b) Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Calculer P^{-1}.

c) Quelle relation lie les matrices A, D, P et P^{-1} ?

d) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. Soit φ l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $\varphi(P) = (X^2 - 1)P' - 2XP$.

(i) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

(ii) Donner la matrice A de φ dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

(iii) Montrer que $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$ définie par $P_1 = (X+1)^2$, $P_2 = X_1^2$ et $P_3 = (X-1)^2$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$.

(iv) Donner la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.

(v) Donner la matrice de φ^n dans la base $\mathcal{B}$, puis dans la base canonique.

Exercice 5. Montrer que pour toute matrice carrée A, si $\mathrm{Tr}({}^{\mathbf{t}}AA) = 0$ alors $A = 0$.

Exercice 6. Les matrices suivantes sont-elles semblables ?

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(iii) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(iv) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 7. Montrer qu'on ne peut pas trouver deux matrices A et B telles que $AB - BA = I_n$.

Exercice 8. Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\varphi(P) = P(X+1)$.

Donner la matrice de φ dans la base canonique, puis montrer qu'elle est inversible. Donner son inverse.

Exercice 9. *Matrices à diagonale strictement dominante.*

(i) Montrer qu'une matrice A est inversible si et seulement si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ AX = 0 \Rightarrow X = 0$.

(ii) Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice à diagonale strictement dominante, *i.e.*

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ |a_{i,i}| \geqslant \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.

Exercice 10. *Matrices magiques (Oral ESCP)*

Soit $n \geqslant 2$. On note $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble

$$\mathcal{C} = \left\{ A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall i, j \in \{1, \dots, n\},\ \alpha = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} \right\}$$

a) Montrer que $\mathcal{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

b) Montrer que l'application f définie sur $\mathcal{C}$ et à valeurs réelles par $d(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{1,k}$ est une application linéaire surjective et non injective.

c) i. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement s'il existe un réel λ tel que $AJ = JA = \lambda J$.

ii. Soient A, B deux matrices de $\mathcal{C}$. Montrer que AB appartient à $\mathcal{C}$, et calculer $d(AB)$.

iii. Soit A une matrice inversible de $\mathcal{C}$. Montrer que A^{-1} appartient à $\mathcal{C}$, et trouver une relation entre $d(A)$ et $d(A^{-1})$.

iv. Montrer que $\ker(d)$ et $\mathrm{Vect}(J)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{C}$.

v. Soit $(r, s) \in [\![2, n]\!]^2$, et soit $A_{r,s} = (a_{i,j})$ la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf $a_{1,1} = a_{r,s} = 1$ et $a_{1,s} = a_{r,1} = -1$.
Montrer que la famille $(A_{r,s})_{(r,s)\in[\![2,n]\!]^2}$ forme une base de $\ker(d)$, et en déduire la dimension de $\mathcal{C}$.

vi. Soient p un entier naturel non nul et A une matrice de $\mathcal{C}$. Montrer que $B = \frac{d(A)}{n} J$ est solution de l'équation $A^p - B^p = (A - B)^p$.